

Ley de Darcy. Conductividad hidráulica

Experiencia de Darcy

El ingeniero Henry Darcy trabajó muchos años en el abastecimiento de agua a la ciudad francesa de Dijon¹. Se interesó en el flujo del agua a través de los medios porosos porque se utilizaban filtros de arena para depurar el agua y por la observación de pozos que contribuían al abastecimiento de la ciudad. En 1856 presentó un voluminoso informe sobre el tema, que incluía un pequeño apéndice describiendo sus experimentos y la obtención de la ley. Ese pequeño anexo puede considerarse el nacimiento de la hidrogeología como ciencia, ha sido la base de todos los estudios físico-matemáticos posteriores sobre el flujo del agua subterránea.

En los laboratorios actuales disponemos de aparatos muy similares al que utilizó Darcy, y que se denominan permeámetros de carga constante² (Figura 1)

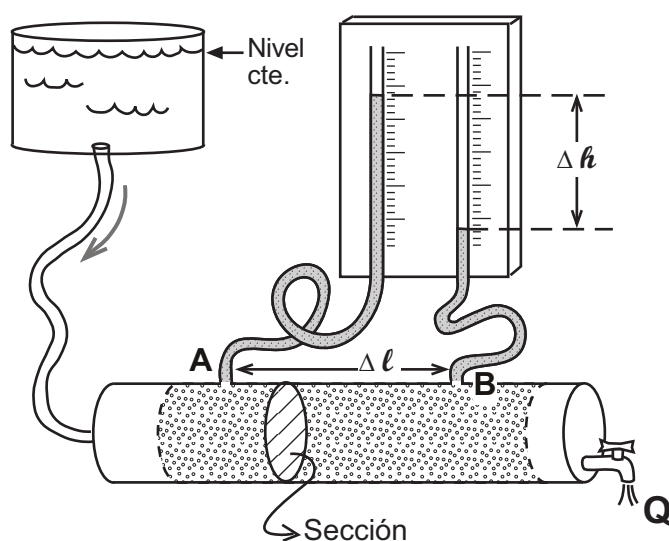


Figura 1.- Permeámetro de carga constante.

Q = Caudal

Δh = Diferencia de Potencial entre A y B

Δl = Distancia entre A y B

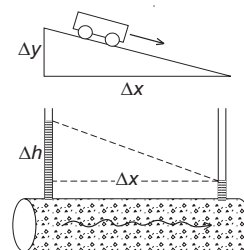
$$\text{Gradiente hidráulico} = \frac{\Delta h}{\Delta l}$$

Básicamente un permeámetro es un recipiente de sección constante por el que se hace circular agua conectando a uno de sus extremos un depósito elevado de nivel constante. En el otro extremo se regula el caudal de salida mediante un grifo que en cada experimento mantiene el caudal también constante. Finalmente, se mide la altura de la columna de agua en varios puntos (como mínimo en dos, como en la Figura 1).

Darcy repitió el experimento de la figura 1 con varios materiales porosos y cambiando las variables, y dedujo que *el caudal que atravesaba el permeámetro era linealmente proporcional a la sección y al gradiente hidráulico*. Y que la constante de proporcionalidad era característica de cada arena o material que llenaba el permeámetro.

Gradiente es el incremento de una variable entre dos puntos del espacio, en relación con la distancia entre esos dos puntos. Si la variable considerada fuera la altitud de cada punto, el gradiente sería la pendiente entre los dos puntos considerados.

O bien, si entre dos puntos situados a 2 metros de distancia existe una diferencia de temperatura de 8°C, diremos que hay entre ellos un gradiente térmico de 4°C/metro. Cuanto mayor sea ese gradiente térmico, mayor será el flujo de calorías de un punto a otro.



¹ En 1830 dirigió la perforación de un sondeo que no se pudo utilizar porque se necesitaba que fuera surgente para utilizarlo sin bomba de extracción; en 1834 diseñó un acueducto de 13 km para abastecer a la ciudad.

² En laboratorio, el permeámetro se sitúa verticalmente y con el flujo ascendente para facilitar la evacuación del aire contenido inicialmente en el material poroso. Aquí se presenta horizontal para emular la situación más común del flujo subterráneo.

Es decir: variando el caudal con un grifo y/o moviendo el depósito elevado, los niveles del agua en los tubos varían. Podemos probar también con permeámetros de distintos diámetros y midiendo la altura de la columna de agua en puntos más o menos próximos (diferentes Δl). Pues bien: cambiando todas las variables, siempre que utilicemos la misma arena, se cumple que:

$$Q = K \cdot \text{Sección} \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad (1)$$

Y el valor de K permanece constante siempre que utilicemos la misma arena. (Ver la figura 1 para el significado de las otras variables)

Si utilizamos otra arena (más gruesa o fina, o mezcla de gruesa y fina, etc.) y jugando de nuevo con todas las variables, se vuelve a cumplir la ecuación anterior, pero la constante de proporcionalidad K es otra distinta. Darcy concluyó, por tanto, que esa constante era propia y característica de cada arena. Esta constante se llamó *permeabilidad* (K) aunque su denominación correcta actual es *conductividad hidráulica*.

Como las unidades del caudal Q son L^3/T , la sección es L^2 , e Δh e Δl son longitudes, se comprueba que las **unidades** de la permeabilidad (K) son las de una velocidad (L/T).

La expresión correcta de la Ley de Darcy es la siguiente:

$$q = -K \cdot \left(\frac{dh}{dl} \right) \quad (2)$$

donde: $q = Q / \text{sección}$ (es decir: caudal que circula por m^2 de sección)

$K =$ Conductividad hidráulica

$dh/dl =$ gradiente hidráulico expresado en incrementos infinitesimales

El signo menos se debe a que el nivel disminuye en el sentido del flujo; es decir, que Δh o dh son negativos y el signo menos hace que el caudal sea positivo.

Aplicando directamente la ley de Darcy se puede calcular la K , o conociendo el valor de K se puede calcular el caudal, como veremos en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.- En un permeámetro de laboratorio (como el mostrado en la figura 1) queremos medir la conductividad hidráulica de una arena. La sección del permeámetro es de 340 cm^2 y la distancia entre las dos conexiones a los tubos piezométricos (Δl) es de 45 cm. El caudal de salida es de 2,7 litros/minuto y la diferencia de altura entre las dos columnas de agua (Δh) es de 68 cm. Calcular la conductividad hidráulica en metros/día.

Solución:

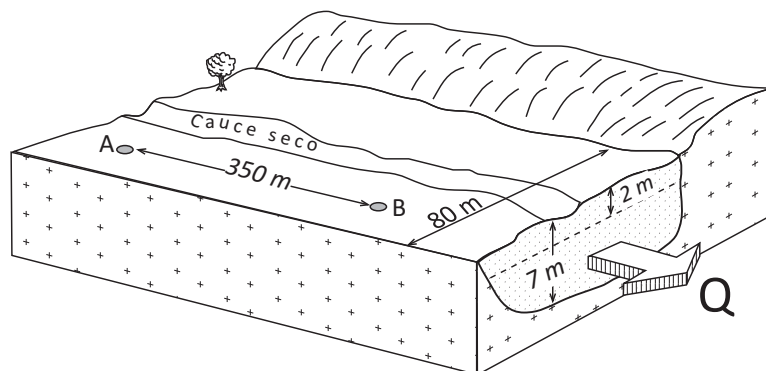
Aplicando la fórmula (1):

$$3,8 \cdot 10^{-3} \cdot 1440 = K \cdot 300 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{68}{45}$$

[Caudal pasado de litros/minuto a $m^3/\text{día}$ (1 día tiene 1440 minutos), y sección pasada de cm^2 a m^2]

Despejando: $K = 120,7 \text{ m}^2/\text{día}$

Ejemplo 2.- Evaluar el caudal circulante a través de un aluvial encajado en rocas impermeables. $K = 60 \text{ m/día}$. Entre los dos pozos A y B la diferencia de cota de los niveles freáticos es de 4,2 metros. El resto de los datos se indican en la figura: anchura media del aluvial: 80 metros; profundidad media del aluvial: 7 metros; profundidad media de la



superficie freática: 2 metros

Solución:

$$\text{Gradiente hidráulico} = (\Delta h / \Delta l) = 4,2 / 350 = 0,012$$

$$\text{Sección transversal} = (7-2) \cdot 80 = 400 \text{ m}^2$$

$$\text{Caudal (m}^3/\text{día)} = K \cdot \text{Sección} \cdot (\Delta h / \Delta l) = 60 \cdot 400 \cdot 0,012 = 288 \text{ m}^3/\text{día}$$

Cuando se trata de flujo horizontal en un acuífero, es frecuente conocer la transmisividad, no la conductividad hidráulica. En el ejemplo siguiente veremos que es posible calcular el caudal sin conocer la K ni el espesor del acuífero.

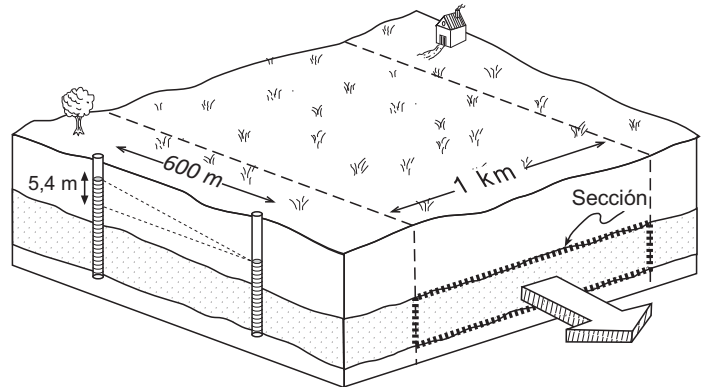
Ejemplo 3.- En un acuífero confinado conocemos la dirección regional del flujo subterráneo y su transmisividad, que es de $140 \text{ m}^2/\text{día}$. Queremos calcular el flujo a través de una franja de 1 km de anchura (perpendicular al flujo). Entre dos pozos situados a una distancia de 600 metros en la dirección del flujo la diferencia de nivel es de 5,4 metros.

Solución:

$$\text{Sección} = (\text{espesor} \cdot 10^3) \text{ m}^2$$

$$\text{Caudal (m}^3/\text{día)} = K \cdot \text{Sección} \cdot (\Delta h / \Delta l) =$$

$$= K \cdot [\text{espesor} \cdot 10^3] \cdot (5,4 / 600) = T \cdot 10^3 \cdot (5,4 / 600) = 1260 \text{ m}^3/\text{día}$$



Velocidad real y velocidad de Darcy

Sabemos que en cualquier conducto por el que circula un fluido se cumple que:

$$\text{Caudal} = \text{Sección} \times \text{Velocidad} \quad (3)$$

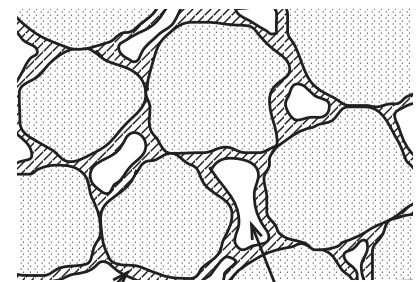
$$L^3/T = L^2 \times L/T$$

Si aplicamos esta consideración al cilindro del permeámetro de Darcy, y calculamos la velocidad a partir del caudal y de la sección, que son conocidos, obtendremos una velocidad falsa, puesto que el agua no circula por toda la sección del permeámetro, sino solamente por una pequeña parte de ella. A esa velocidad falsa (la que llevaría el agua si circulara por toda la sección del medio poroso) se denomina “velocidad Darcy” o “velocidad de flujo”:

$$\text{Velocidad Darcy} = \text{Caudal} / \text{Sección total} \quad (4)$$

La parte de la sección total por la que puede circular el agua es la porosidad eficaz³; si una arena tiene una porosidad del 10% (0,10), el agua estaría circulando por el 10% de la sección total del tubo. Y para que el mismo caudal circule por una sección 10 veces menor, su velocidad será 10 veces mayor. Por tanto, se cumplirá que:

$$\text{Velocidad lineal media} = \text{Velocidad Darcy}$$



Agua adherida a los granos Porosidad eficaz: sección útil para el flujo

Figura 5.- La parte de la sección utilizable por el flujo es la porosidad eficaz

³ Efectivamente, como explicábamos en el tema anterior, el agua no puede fluir por toda la porosidad, ya que el agua adherida a los granos es relativamente inmóvil. Reproducimos una figura del tema anterior.

$/m_e$

(5)

(m_e = porosidad eficaz)

El resultado de la expresión (5) también se denomina *velocidad real* (es realmente la velocidad a la que las partículas atraviesan una sección del medio poroso, como la mostrada en la figura 2). Pero no es la velocidad que observaríamos desde el exterior del medio poroso al cronometrar el tiempo de recorrido entre dos puntos.

En la figura 6 se muestra un tubo de longitud L_1 lleno de arena por el que se hace circular agua. Evaluaremos la velocidad del agua por dos procedimientos:

1º) Calculamos la *velocidad* mediante la expresión (5).

2º) Medimos experimentalmente el tiempo de recorrido añadiendo un colorante al agua. Con ese tiempo calculamos la velocidad así:

$$\text{Velocidad observada} = \text{Distancia} / \text{tiempo} = L_1 / \text{tiempo} \quad (6)$$

Esta *velocidad observada* sería inferior a la *calculada* mediante (5), ya que el agua ha tenido que recorrer una distancia mayor (ha recorrido L_2 y no L_1) por lo que aparentemente ha circulado a una velocidad menor. Por tanto, el tiempo real de recorrido entre dos puntos puede ser ligeramente mayor al predicho mediante la expresión (5). La relación entre la velocidad observada desde el exterior del medio poroso y la calculada a partir de Darcy y de la porosidad eficaz será así:

$$\text{Velocidad observada} = \text{Velocidad lineal media} / \text{coeficiente} \quad (7)$$

Ese coeficiente depende de la tortuosidad del medio poroso, y aproximadamente puede ser de 1,0 a 1,18 en arenas (Freeze y Cherry, p. 71).

En la práctica, habitualmente se utiliza la expresión (5) refiriéndose al resultado como “velocidad real”, y se aplica esta velocidad para calcular el tiempo de recorrido del agua subterránea, pero debemos ser conscientes del error que se podemos cometer al despreciar la tortuosidad del recorrido.

En la figura 7 se muestra el vector *velocidad lineal media*.

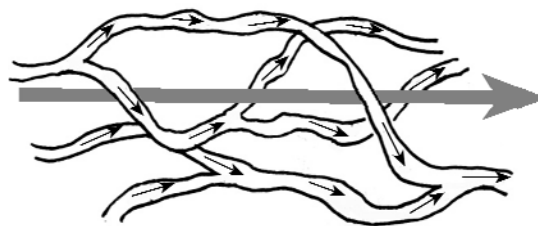


Figura 7- Velocidad lineal media

Ejemplo 4.- Con los datos del ejemplo 2, calcular el tiempo de recorrido del agua entre los pozos A y B suponiendo que la porosidad eficaz es 8%

Solución:

$$\text{Velocidad Darcy} = Q / \text{sección} = 288 / 400 = 0,72 \text{ m/día}$$

$$\text{Velocidad lineal media} = \text{Velocidad Darcy} / m_e = 0,72 / 0,08 = 9 \text{ m/día}$$

$$\text{tiempo} = \text{distancia} / \text{velocidad} = 350 / 9 = 39 \text{ días}$$

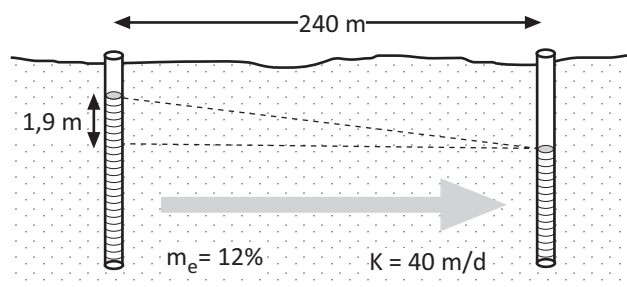
Como el agua no recorre 350 metros, sino una distancia mayor debido a la tortuosidad, el tiempo real debería ser ligeramente superior.

Para calcular la velocidad no es necesario conocer la sección ni el caudal. A partir de la expresión (1) observamos que: $Q/\text{sección} = K \cdot (\Delta h/\Delta l)$. Por tanto, aunque la parte izquierda de la ecuación corresponde a la definición de *velocidad Darcy*, podemos calcularla utilizando la parte derecha:

Ejemplo 5.- En dos sondeos situados en la dirección del flujo subterráneo, a una distancia de 240 metros, se mide que la diferencia de nivel piezométrico es de 1,9 metros. La permeabilidad es de 40 m/día y la porosidad 12%. Calcular el tiempo de recorrido del agua entre ambas captaciones.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Velocidad Darcy} &= Q / \text{sección} = K \cdot (\Delta h/\Delta l) = \\ &= 40 \cdot (1,9/240) = 0,32 \text{ m/día} \end{aligned}$$



Velocidad lineal media = Velocidad Darcy / $m_e = 0,32 / 0,12 = 2,64$ m/día

Tiempo = distancia / velocidad = $240 / 2,64 = 91$ días

Flujo a través de varias capas: Permeabilidad equivalente

En un medio estratificado, con frecuencia se produce el flujo a través de varias capas, y deseamos aplicar la ley de Darcy globalmente al conjunto de capas. Los dos casos más sencillos son cuando consideramos el flujo paralelo a los contactos entre las capas o el flujo perpendicular a las capas. Suponemos que cada una de las capas es homogénea e isotrópica.

Permeabilidad (o conductividad hidráulica) *equivalente* es un valor global que podemos asignar al conjunto de capas considerado como una unidad. Y hablaremos de K *equivalente horizontal* (K_h) o K *equivalente vertical* (K_v) refiriéndonos respectivamente a los dos casos citados (suponiendo las capas horizontales, el flujo paralelo a las capas es horizontal, y el flujo perpendicular a las capas es vertical).

(La deducción de las fórmulas se encuentra en el Apéndice II).

Si el **flujo es paralelo a las capas** (los dos sondeos, que suponemos abiertos en todas las capas, indican el gradiente que provoca el flujo), la permeabilidad equivalente (K_h) se calcula con esta expresión:

$$K_h = \frac{\sum K_i \cdot b_i}{B} \quad (8)$$

siendo:

K_h = conductividad hidráulica horizontal equivalente

K_i = conductividad hidráulica de cada una de las capas

b_i = espesor de cada una de las capas

B = espesor total, suma de todos los espesores

Teniendo en cuenta que: $K \cdot \text{espesor} = T$

(transmisividad), la fórmula obtenida equivale a decir que *la transmisividad equivalente del conjunto* ($K_h \cdot B$) *es igual a la suma de las transmisividades de todas las capas* ($\sum K_i \cdot b_i$).

Si el **flujo es perpendicular a las capas** (los dos sondeos, que suponemos abiertos en sus extremos, indican el gradiente que provoca el flujo), la permeabilidad equivalente (K_v) es igual a:

$$K_v = \frac{B}{\sum \frac{b_i}{K_i}} \quad (9)$$

siendo:

K_v = conductividad hidráulica vertical equivalente

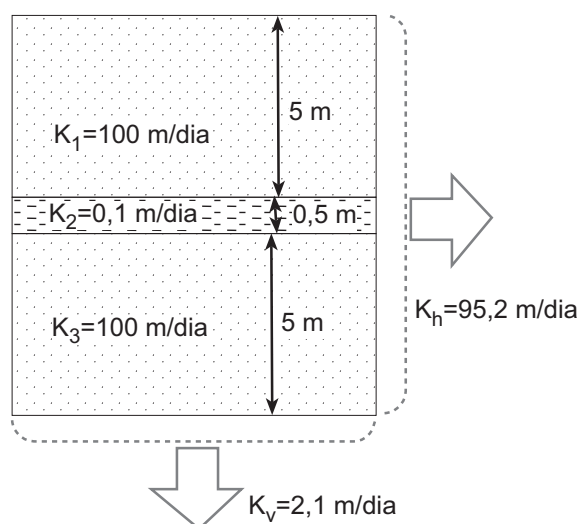
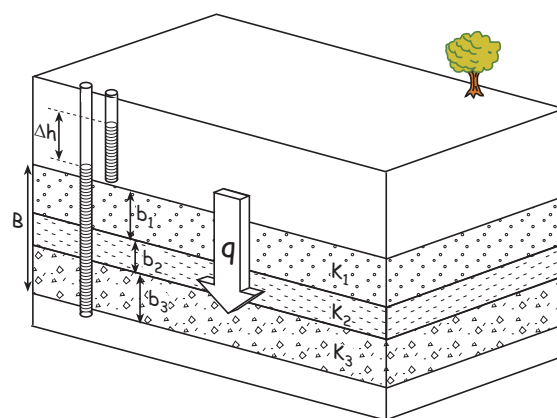
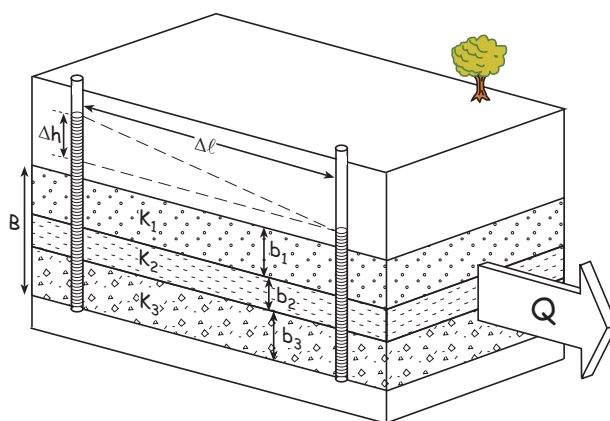
K_i = conductividad hidráulica de cada una de las capas

b_i = espesor de cada una de las capas

B = espesor total, suma de todos los espesores

Ejemplo 6.- Consideramos tres capas: dos capas de arenas con una intercalación de limos, con los espesores y permeabilidades que se indican en la figura:

Con las expresiones (8) y (9) obtenemos:



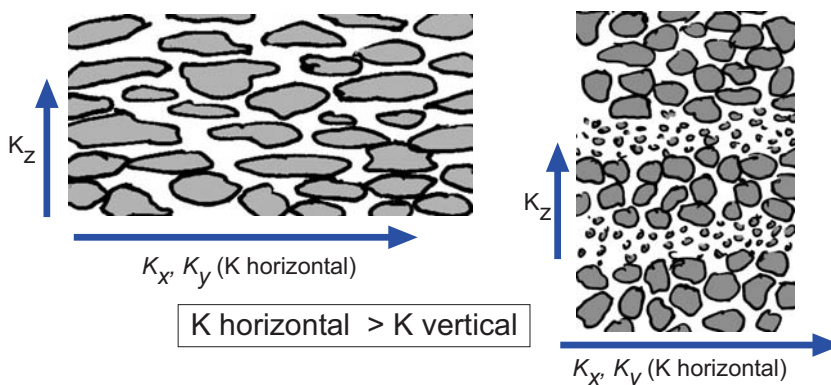
En flujo horizontal: $K_h = 95$ m/día, la fina capa intermedia es irrelevante, la conductividad hidráulica equivalente se aproxima a la de las dos capas de arena. La capa impermeable apenas influye.

En el flujo vertical: $K_v = 2$ m/día. Unos centímetros de material poco permeable influyen más en el valor global que 10 metros de materiales muy permeables.

Anisotropía

Con frecuencia la K vertical de una formación detrítica es menor que la K horizontal, debido a la forma y disposición de los granos (en la figura, a la izquierda), o a la presencia de láminas intercaladas de menor permeabilidad (a la derecha).

Para una descripción matemática del medio permeable, puede ser necesario asignar tres valores K_x , K_y y K_z . Por ejemplo, en el programa MODFLOW debemos introducir los valores de la conductividad hidráulica en las tres direcciones, aunque generalmente se utiliza $K_x = K_y$.



Generalmente no se dispone de un conocimiento del medio poroso suficiente para poder especificar el valor de la conductividad hidráulica (K) en las tres direcciones del espacio: X, Y (horizontales) y Z (vertical) y con frecuencia debemos limitarnos a asignar a una formación geológica un valor de K suponiéndolo válido para cualquier dirección (medio isótropo), o estimando que la K vertical sea menor que la horizontal.

Limitaciones de la Ley de Darcy

La Ley de Darcy puede no cumplirse por las siguientes razones:

1ª). La constante de proporcionalidad K no es propia y característica del medio poroso, sino que también depende del fluido.

El factor K puede descomponerse así:
$$K = k \frac{\gamma}{\mu} \quad (10)$$

donde: K = conductividad hidráulica

k = Permeabilidad intrínseca (depende sólo del medio poroso)⁴

γ = peso específico del fluido

μ = viscosidad dinámica del fluido

Podemos modificar la expresión (10), teniendo en cuenta que:

Viscosidad dinámica (μ) = viscosidad cinemática (ν) . densidad (ρ)

Peso específico (γ) = densidad (ρ) . gravedad (g)

Resultando:
$$K = k \cdot \frac{g}{\nu} \quad (11)$$

⁴ Esta k también se denomina *absolute permeability* o *coefficient of permeability* o simplemente *permeability*. La denominación de k como *permeabilidad* (sin adjetivos) puede generar confusión ya que también se utiliza en el lenguaje común para referirnos a la K (conductividad hidráulica).

donde: g = aceleración de la gravedad
 ν = viscosidad cinemática del fluido⁵

Esta cuestión es fundamental en geología del petróleo o en el flujo de contaminantes, donde se estudian fluidos de diferentes características. En el caso del agua, la salinidad apenas hace variar el peso específico ni la viscosidad. Solamente habría que considerar la variación de la viscosidad con la temperatura, que se duplica de 35 a 5 ° C, con lo que la conductividad hidráulica (K) sería la mitad y también se reduciría en la misma proporción el caudal circulante por la sección considerada del medio poroso. Las aguas subterráneas presentan mínimas diferencias de temperatura a lo largo del año en un mismo acuífero, pero en otros entornos sí pueden producirse diferencias de temperatura notables.

Por tanto, aunque sabemos que K depende tanto del medio como del propio fluido, si estamos considerando el flujo de aguas subterráneas, la variación correspondiente al fluido en una región determinada es despreciable, por lo que a efectos prácticos asumimos que la K de Darcy, o conductividad hidráulica es una característica del medio poroso.

(Ver Apéndice I)

Ejemplo 7.- El valor de K (60 m/día) utilizado en el ejemplo 2 se había medido en un permeámetro de laboratorio, donde la temperatura del agua era de 21°C. En el terreno la temperatura del agua subterránea es de 15°C. Calcular la conductividad hidráulica de ese aluvial con agua a 15°C.

Solución:

Aplicando la fórmula (11) para 21° y para 15° y dividiendo miembro a miembro resulta:

$$\frac{K_{15}}{K_{21}} = \frac{\nu_{21}}{\nu_{15}} \quad ; \quad K_{15} = K_{21} \cdot \frac{\nu_{21}}{\nu_{15}} = 60 \cdot \frac{0,981}{1,140} = 51,6 \text{ m/día}$$

Sería necesario repetir los mismos cálculos del ejemplo 2 con el nuevo valor de K .

2ª). La relación entre el caudal y el gradiente hidráulico no es lineal en algunas circunstancias. Esto puede suceder cuando el valor de K es muy bajo o cuando las velocidades del flujo son muy altas.

En el primer caso, si aplicamos la Ley de Darcy para calcular el flujo a través de una formación arcillosa, el caudal que obtendríamos sería muy bajo, pero en la realidad será nulo, no habrá circulación de agua si no se aplican unos gradientes muy elevados.

En el segundo caso, si el agua circula a gran velocidad, el caudal es directamente proporcional a la sección y al gradiente, pero no linealmente proporcional, sino que la función sería potencial:

$$q = -K \left(\frac{dh}{dl} \right)^n \quad (12)$$

donde el exponente n es distinto de 1.

Para estudiar este límite de validez de la ley de Darcy se aplica el **número de Reynolds**. Este coeficiente se creó para canales abiertos o tuberías, y en general valores altos indican **régimen turbulento** y valores bajos indican **régimen laminar**. Para medios porosos se aplica la fórmula utilizada para canales o tubos, pero sustituyendo el diámetro de la conducción por el diámetro medio de los granos del medio poroso y utilizando la velocidad Darcy (no la velocidad real o lineal media):

$$R = \frac{\rho \nu d}{\mu} = \frac{\nu d}{\nu} \quad (13)$$

Donde: ρ = densidad del fluido (Kg/m³)
 ν = velocidad de Darcy (m/s)

⁵ El símbolo para la viscosidad cinemática es similar a la ν de la velocidad Darcy. La viscosidad cinemática se representa con la letra griega nu (o ni) minúscula (ν).

d = diámetro medio de los granos (m)
 μ = viscosidad dinámica (Pascal·m = Kg/(m²·s))
 ν = viscosidad cinemática ($=\mu/\rho$) (m²/s)

Es imposible conocer el grado de turbulencia del flujo a través de un medio poroso, pero experimentalmente se ha observado que deja de cumplirse la Ley de Darcy (el caudal deja de ser *linealmente* proporcional al gradiente) cuando R alcanza un valor que varía entre 1 y 10. (Es decir: $R < 1$, **sí** se cumple Darcy; $R > 10$, **no** se cumple Darcy; R entre 1 y 10, puede cumplirse o no). Esa falta de precisión del valor límite será debida a otros factores diferentes del diámetro medio de los granos: heterometría, forma, etc.

En el flujo subterráneo las velocidades son muy lentas, los valores de R muy bajos, y prácticamente siempre la relación es lineal, salvo en las proximidades de algunas captaciones bombeando caudales elevados.

Apéndice I. Variación de la conductividad hidráulica con el fluido

Aplicando la fórmula (11) a dos fluidos de viscosidades cinemáticas ν_1 y ν_2 respectivamente, y dividiendo miembro a miembro, obtenemos:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1} ; \quad \text{siendo: } K_1 = \text{conductividad hidráulica circulando el fluido de viscosidad } \nu_1$$

$$K_2 = \text{conductividad hidráulica circulando el fluido de viscosidad } \nu_2$$

Si en ambos casos el fluido es el agua, la viscosidad varía con la temperatura, de modo que los valores de pueden obtenerse de la tabla siguiente:

temp (°C)	Densidad (10 ³ Kg/m ³)	Viscosidad dinámica (10 ⁻³ .Kg/(m.s))	Viscosidad cinemática (centistokes =10 ⁻⁶ m ² /s)	temp (°C)	Densidad (10 ³ Kg/m ³)	Viscosidad dinámica (10 ⁻³ .Kg/(m.s))	Viscosidad cinemática (centistokes =10 ⁻⁶ m ² /s)
0	0,99982	1,792	1,792	20	0,99829	1,003	1,005
1	0,99989	1,731	1,731	21	0,99808	0,979	0,981
2	0,99994	1,674	1,674	22	0,99786	0,955	0,957
3	0,99998	1,620	1,620	23	0,99762	0,933	0,935
4	1,00000	1,569	1,569	24	0,99738	0,911	0,913
5	1,00000	1,520	1,520	25	0,99713	0,891	0,894
6	0,99999	1,473	1,473	26	0,99686	0,871	0,874
7	0,99996	1,429	1,429	27	0,99659	0,852	0,855
8	0,99991	1,386	1,386	28	0,99631	0,833	0,836
9	0,99985	1,346	1,346	29	0,99602	0,815	0,818
10	0,99977	1,308	1,308	30	0,99571	0,798	0,801
11	0,99968	1,271	1,271	31	0,99541	0,781	0,785
12	0,99958	1,236	1,237	32	0,99509	0,765	0,769
13	0,99946	1,202	1,203	33	0,99476	0,749	0,753
14	0,99933	1,170	1,171	34	0,99443	0,734	0,738
15	0,99919	1,139	1,140	35	0,99408	0,720	0,724
16	0,99903	1,109	1,110	36	0,99373	0,705	0,709
17	0,99886	1,081	1,082	37	0,99337	0,692	0,697
18	0,99868	1,054	1,055	38	0,99300	0,678	0,683
19	0,99849	1,028	1,030	39	0,99263	0,666	0,671

Por ejemplo: para 19 °C: visc dinámica = 1,028.10⁻³ Kg/(m.s) ; visc cinemática = 1,030.10⁻⁶ m²/s

Ejemplo: Hemos medido la K de unas arenas circulando agua a 24°C= 13,8 m/día. Calcular la K con agua a 5°C.

$$\frac{K_{5^\circ}}{K_{24^\circ}} = \frac{\nu_{24^\circ}}{\nu_{5^\circ}} ; \quad K_{5^\circ} = 13,8 \text{ m/día} \cdot \frac{0,913}{1,520} = 8,29 \text{ m/día}$$

Lógicamente, los caudales calculados al aplicar la Ley de Darcy variarán en la misma proporción en que varía la K .

Apéndice II. Flujo a través de varias capas: Obtención de las fórmulas de la permeabilidad equivalente

Flujo paralelo a las capas:

Caudal a través de la capa superior por metro de ancho (ver "1 m" en la figura):

$$Q_1 = -K_1 \cdot [b_1 \cdot 1] \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l}$$

(entre corchetes [] figura la sección)

El caudal total será la suma del que circula a través de todas las capas consideradas:

$$Q = \sum Q_i = -(\sum K_i \cdot b_i) \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l}$$

(el gradiente $\Delta h/\Delta l$ está fuera del sumatorio ya que es común a todas las capas; ver Δh e Δl en la figura)

También podemos calcular el caudal total Q aplicando la ley de Darcy a todas las capas conjuntamente, utilizando una K_h equivalente (cuyo valor aún desconocemos); llamaremos B a la suma de todos los espesores ($B = \sum b_i$) :

$$Q = -K_h \cdot [B \cdot 1] \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad (\text{entre corchetes [] figura la sección})$$

sección)

Igualando las dos expresiones anteriores:

$$-(\sum K_i \cdot b_i) \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l} = -K_h \cdot [B \cdot 1] \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad ; \quad (\sum K_i \cdot b_i) = K_h \cdot B$$

y despejando K_h obtenemos:

$$K_h = \frac{(\sum K_i \cdot b_i)}{B}$$

siendo: K_h = conductividad hidráulica horizontal equivalente

K_i = conductividad hidráulica de cada una de las capas

b_i = espesor de cada una de las capas

B = espesor total, suma de todos los espesores

Flujo es perpendicular a las capas:

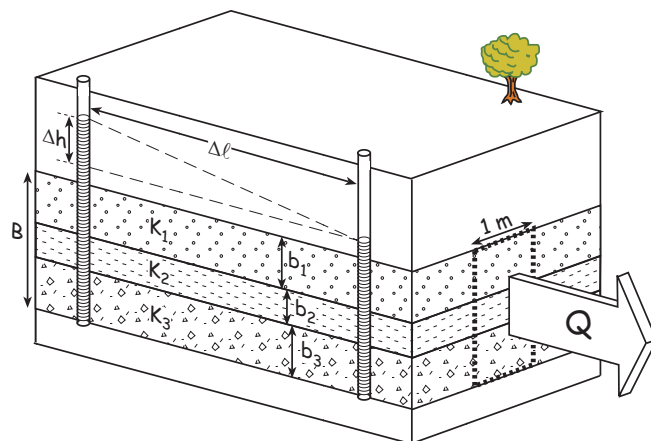
Consideremos el caudal vertical que atraviesa una sección unidad (q = caudal específico o caudal por m^2 de sección):

Caudal que atraviesa verticalmente el conjunto de capas (el Δh total está indicado en la figura):

$$q = -K_v \cdot \frac{\Delta h}{B}$$

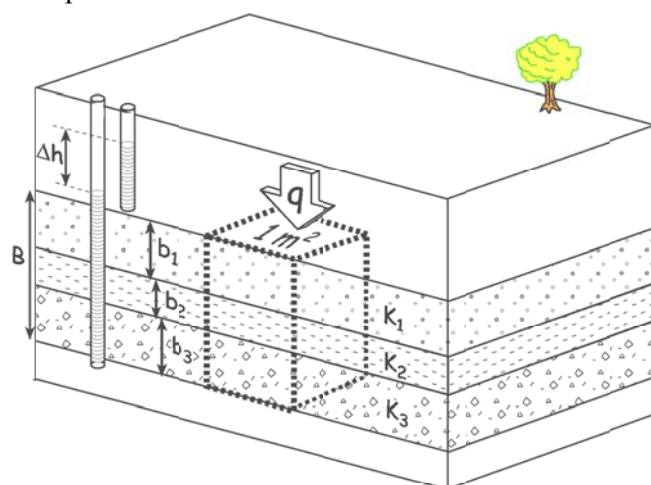
Caudal que atraviesa verticalmente la capa n° 1:

$$q_1 = -K_1 \cdot \frac{\Delta h_1}{b_1}$$



Q es el caudal que pasa por la sección de anchura unidad y altura el espesor de las capas (rectángulo punteado grueso).

Los dos sondeos están ranurados en las tres capas. (Podrían estar abiertos solamente en un punto cualquiera de su vertical, ya que suponemos que no existe variación del potencial hidráulico en la misma vertical)



q es el caudal que circula verticalmente por la sección unidad perpendicular a las capas (vertical a través del prisma señalado en punteado grueso).

Los dos sondeos están abiertos en sus extremos (por encima y por debajo de las tres capas).

(Δh_1 = diferencia de potencial entre los límites superior e inferior de la capa 1)

Los dos caudales anteriores son iguales, ya que es **el mismo caudal** q el que atraviesa la primera capa (ahí lo hemos llamado q_1), pasa luego a la segunda, etc.; luego igualamos las dos últimas ecuaciones:

$$K_v \cdot \frac{\Delta h}{B} = K_1 \cdot \frac{\Delta h_1}{b_1}$$

Y despejando Δh_1 resulta: $\Delta h_1 = K_v \cdot \frac{\Delta h}{B} \cdot \frac{b_1}{K_1}$

Aplicando la última expresión a todas las capas y sumando:

$$\sum \Delta h_i = K_v \cdot \frac{\Delta h}{B} \cdot \sum \frac{b_i}{K_i}$$

Como la diferencia de potencial hidráulico de todo el conjunto es la suma de las diferencias de potencial de cada una de las capas ($\sum \Delta h_i = \Delta h$):

$$\Delta h = K_v \cdot \frac{\Delta h}{B} \cdot \sum \frac{b_i}{K_i}$$

Finalmente, despejando K_v :

$$K_v = \frac{B}{\sum \frac{b_i}{K_i}}$$

siendo: K_v = conductividad hidráulica vertical equivalente
 K_i = conductividad hidráulica de cada una de las capas
 b_i = espesor de cada una de las capas
 B = espesor total, suma de todos los espesores

Apéndice III. Cálculo de K a partir de la granulometría

Para materiales granulares se han establecido diversas fórmulas y gráficos que permiten evaluar la conductividad hidráulica a partir de la granulometría y en algún caso en función de la porosidad. Todas estas expresiones son estimaciones, pero a veces cualquier aproximación es mejor que nada. No hay que olvidar que todas estas fórmulas se refieren a sedimentos granulares, no a rocas consolidadas, aunque se ha aplicado a areniscas (Ishaku et al., 2011).

La expresión de Hazen (1911, en Weight, 2008, p.108) es la más utilizada por su sencillez ⁶:

$$K \text{ (m/día)} = 8,64 \cdot C \cdot d_{10}^2 \quad \text{(III.1)}$$

donde: d_{10} = diámetro (mm) que deja pasar el 10% de los granos (10% menor, 90% mayor)

C = coeficiente que depende del tamaño de grano y de la uniformidad (ver figura III.1).

Para evaluar la uniformidad (homometría) se utiliza el *coeficiente de uniformidad* U :

$$U = d_{60} / d_{10} \quad \text{(III.2)}$$

donde: d_{60} = diámetro que deja pasar el 60% de los granos (60% menor, 40% mayor)

d_{10} = diámetro que deja pasar el 10% de los granos (10% menor, 90% mayor)

El sedimento se considera mal clasificado (poco uniforme, heterométrico) si $U > 6$, bien clasificado (uniforme, homométrico) si $U < 3$ y moderadamente clasificado para valores de U entre 3 y 6.⁷

Aún más simple que Hazen es la expresión del U.S. Bureau of Reclamation (en Kasenow, 2002, p.83):

$$K = 311 \cdot d_{20}^{2,3}$$

donde:

d_{20} = diámetro (mm) que deja pasar el 20% de los granos (20% menor, 80% mayor)

K = conductividad hidráulica (m/día)

Actualmente se aboga (Carrier, 2003) por olvidar la expresión de Hazen y utilizar otras formulaciones. Las expresiones más complejas tienen esta estructura común (Vukovic y Soro, 1992, citado en Odong, 2007):

$$K = \frac{g}{\nu} \cdot [\text{Coef. uniformidad}] \cdot [\text{Función de la porosidad}] \cdot d_e^2 \quad \text{(III.4)}$$

donde:

d_e = diámetro efectivo, que en algunas fórmulas es d_{10} , en otras debe calcularse

g = aceleración de la gravedad

ν = viscosidad cinemática

Si comparamos (III.4) con la fórmula (11) de este capítulo, se comprende que los tres últimos factores de (C.4) evalúan la k (permeabilidad intrínseca, propia del medio), y al multiplicarla por (g/ν) se convierte en K (conductividad hidráulica).

Se describen varias fórmulas en Kasenow (op.cit.), Odong (op.cit.), Vienken y Dietrich (2011).

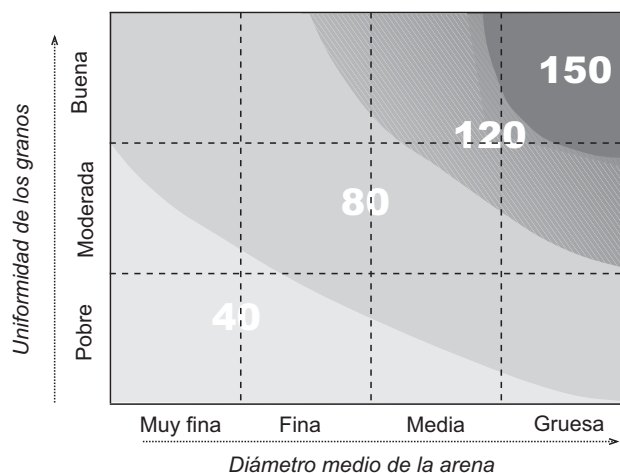


Fig. III-1.-Estimación del coeficiente C de Hazen [dibujado a partir de valores numéricos de Weight (2008)]

⁶ En la expresión original de Hazen el d_{10} se introduce en cm y la K se obtiene en cm/s, y no incluye el coeficiente 8,64 que se muestra aquí. Con este factor 8,64 introducimos el valor d_{10} en mm y obtenemos el resultado (K) en metros/día.

⁷ Estos límites de U (3 y 6) proceden de Weight (2008). Según Bear (1972, p.39) es uniforme si $U < 2$

El *Coefficiente de Uniformidad* y la *Función de la porosidad* que aparecen en (III.4) varían de unas fórmulas a otras. Quizá la más aceptada sea la fórmula de **Kozeny-Carman**, que en su versión más simplificada es (Odong, op.cit.):

$$K = \frac{g}{\nu} \times 8.3 \times 10^{-3} \left[\frac{m^3}{(1-m)^2} \right] d_{10}^2 \quad (\text{III.5})$$

donde: K = conductividad hidráulica (m/s)
 g = gravedad (m/s²)
 ν = viscosidad cinemática (m²/s)
 m = porosidad
 d_{10} = diámetro 10% (metros)

Por ejemplo, a 18 °C, para $m = 0,25$ y $d_{10}^2 = 0,7$ mm:

$$K(m/s) = \frac{9,8}{1,055 \cdot 10^{-6}} \times 8.3 \times 10^{-3} \left[\frac{0,25^3}{(1-0,25)^2} \right] (0,7/1000)^2 = 1,05 \cdot 10^{-3} m/s = 90,67 m/dia$$

Carrier (2003) ó Chapuis (2003) presentan la misma fórmula (Kozeny-Carman), de modo más elaborado y con la diferencia de que m no es la porosidad sino el *índice de vacíos*⁸.

Una aproximación gráfica, sin fórmulas, son las *curvas de Breddin*⁹ (1963, en Simoes, 2010): superponiendo una curva granulométrica sobre este gráfico nos indicará aproximadamente la conductividad hidráulica del material (Figura III-2).

Bibliografía (del Apéndice 3)

- Bear, J. (1972).- *Dynamics of Fluid in Porous Media*. Elsevier, 765 pp.
- Carrier, W.D. (2003).- Goodbye, Hazen; Hello, Kozeny-Carman. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, **11**: 1055-1056
- Chapuis (2003).- *Predicting the Coefficient of Permeability of Soils Using the Kozeny-Carman Equation*. Ecole Polytechnique de Montréal, 35 pp.
- Ishaku, J. M; E.W. Gadzama y U. Kaigama (2011).- Evaluation of empirical formulae for the determination of hydraulic conductivity based on grain-size analysis. *Journal of Geology and Mining Research*. **3(4)**: 105-113.
- Kasenow, M. (2002).- *Determination of Hydraulic Conductivity From Grain Size Analysis*. Water Resources Pub. 97 pp.
- Odong ,J. (2007).- Evaluation of Empirical Formulae for Determination of Hydraulic Conductivity based on Grain-Size Analysis. *Journal of American Science*, **3(3)**: 54-62.
- Vienken, T. y P. Dietrich (2011).- Field evaluation for determining hydraulic conductivity from grain size data. *Journal of Hydrology*, **400**: 58-71
- Weight, W. D. (2008).- *Hydrogeology Field. Manual*. Mc Graw-Hill, 751 pp.

⁸ Porosidad (=vol. huecos / vol. total); Índice de vacíos (=vol. huecos / vol. sólido)
Índice de vacíos = porosidad / (1-porosidad)

⁹ Al igual que todas las curvas granulométricas, con frecuencia este gráfico aparece invertido: en el eje horizontal, grueso a la izquierda, fino a la derecha

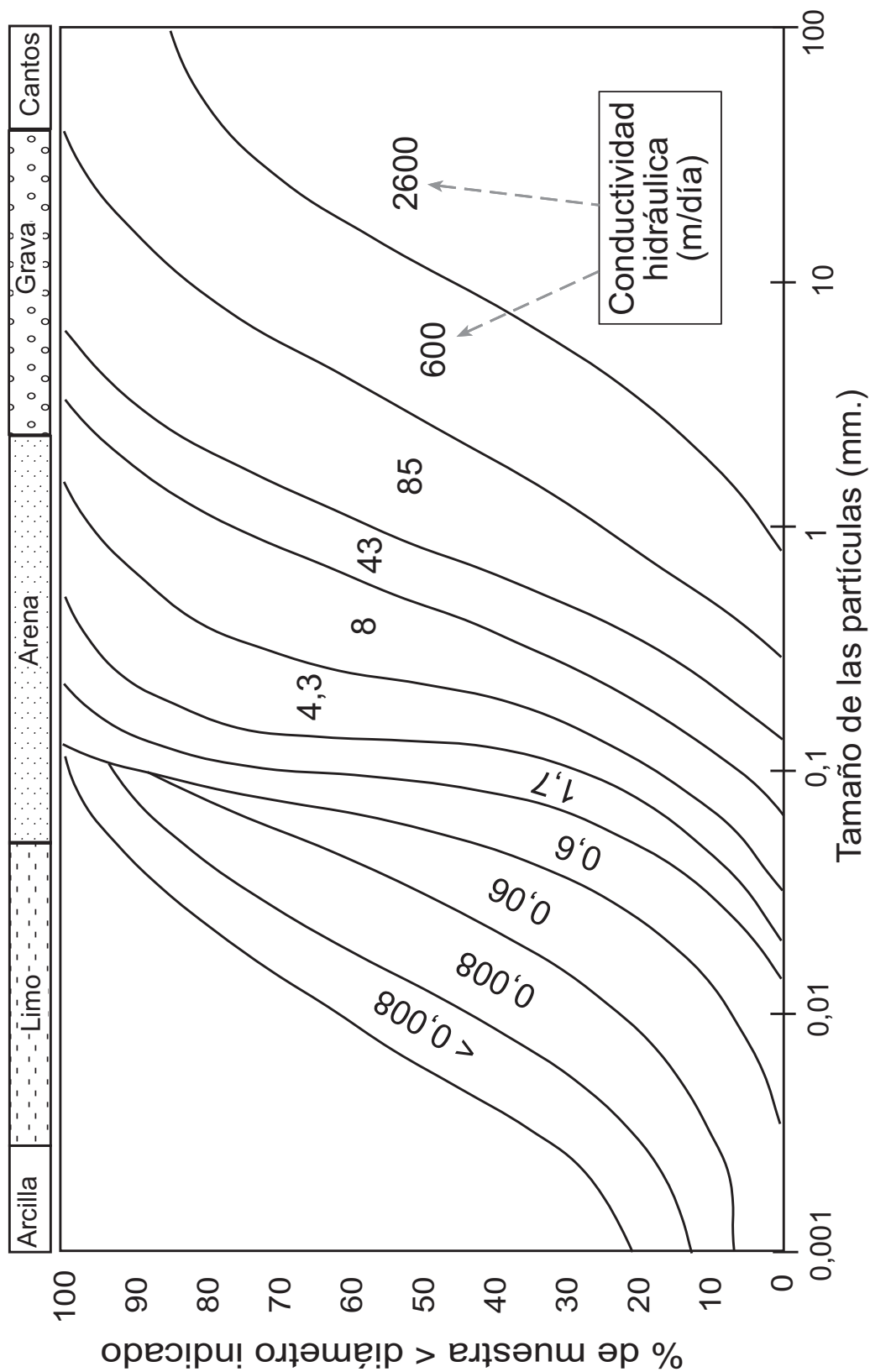


Fig. III- 2. Curvas de Breddin para estimación de la permeabilidad en materiales granulares no consolidados, superponiendo la curva granulométrica