Ley de Darcy. Conductividad hidráulica

Experiencia de Darcy

El ingeniero Henry Darcy trabajó muchos años en el abastecimiento de agua a la ciudad francesa de Dijon[1]. Se interesó en el flujo del agua a través de los medios porosos porque se utilizaban filtros de arena para depurar el agua y por la observación de pozos que contribuían al abastecimiento de la ciudad. En 1856 presentó un voluminoso informe sobre el tema que incluía un pequeño apéndice describiendo sus experimentos y la obtención de la ley. Ese pequeño anexo puede considerarse el nacimiento de la hidrogeología como ciencia, ha sido la base de todos los estudios físico-matemáticos posteriores sobre el flujo del agua subterránea.

En los laboratorios actuales disponemos de aparatos muy similares al que utilizó Darcy, y que se denominan permeámetros de carga constante[2] *(Figura 1)*

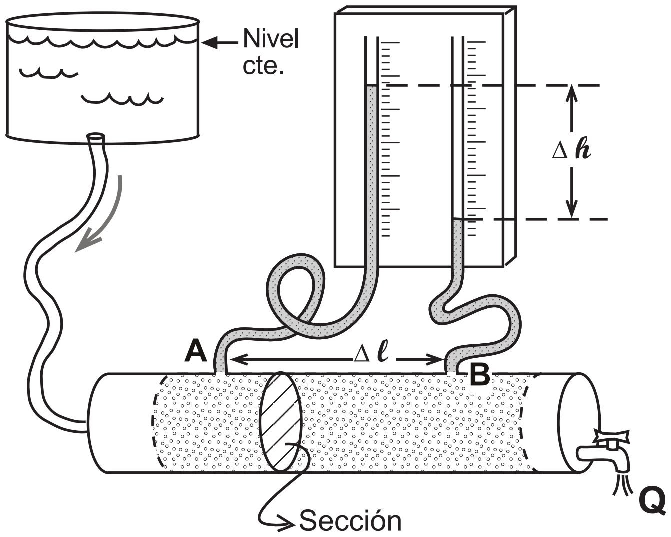


Figura 1.- Permeámetro de carga constante.

Q = Caudal

Δh = Diferencia de Potencial entre A y B

Δl = Distancia entre A y B

Gradiente hidráulico= $\frac{\Delta h}{\Delta l}$

Básicamente un permeámetro es un recipiente de sección constante por el que se hace circular agua conectando a uno de sus extremos un depósito elevado de nivel constante. En el otro extremo se regula el caudal de salida mediante un grifo que en cada experimento mantiene el caudal también constante. Finalmente, se mide la altura de la columna de agua en varios puntos (como mínimo en dos, como en la Figura 1).

Darcy repitió el experimento de la figura 1 con varios materiales porosos y cambiando las variables, y dedujo que *el caudal que atravesaba el permeámetro era linealmente proporcional a la sección y al gradiente hidráulico*. Y que la constante de proporcionalidad era característica de cada arena o material que llenaba el permeámetro.

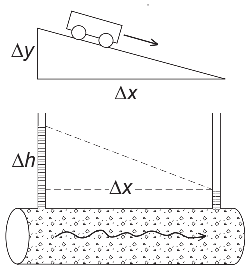
---

[1] En 1830 dirigió la perforación de un sondeo que no se pudo utilizar porque se necesitaba que fuera surgente para utilizarlo sin bomba de extracción; en 1834 diseñó un acueducto de 13 km para abastecer a la ciudad.

[2] En laboratorio, el permeámetro se sitúa verticalmente y con el flujo ascendente para facilitar la evacuación del aire contenido inicialmente en el material poroso. Aquí se presenta horizontal para emular la situación más común del flujo subterráneo.

Gradiente es el incremento de una variable entre dos puntos del espacio, en relación con la distancia entre esos dos puntos. Si la variable considerada fuera la altitud de cada punto, el gradiente sería la pendiente entre los dos puntos considerados.

O bien, si entre dos puntos situados a 2 metros de distancia existe una diferencia de temperatura de 8ºC, diremos que hay entre ellos un gradiente térmico de 4ºC/metro. Cuanto mayor sea ese gradiente térmico, mayor será el flujo de calorías de un punto a otro.



Es decir: variando el caudal con un grifo y/o moviendo el depósito elevado, los niveles del agua en los tubos varían. Podemos probar también con permeámetros de distintos diámetros y midiendo la altura de la columna de agua en puntos más o menos próximos (diferentes Δl). Pues bien: cambiando todas la variables, **siempre que utilicemos la misma arena**, se cumple que:

$$Q = K \cdot Sección \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l} \qquad (1)$$

(K = constante. Ver la figura 1 para el significado de las otras variables)

Si utilizamos otra arena (más gruesa o fina, o mezcla de gruesa y fina, etc.) y jugando de nuevo con todas las variables, se vuelve a cumplir la ecuación anterior, pero la constante de proporcionalidad lineal es otra distinta. Darcy concluyó, por tanto, que esa constante era propia y característica de cada arena. Esta constante se llamó *permeabilidad* (K) aunque su denominación correcta actual es *conductividad hidráulica*.

Como las unidades del caudal Q son L^3/T, la sección es L^2, e Δh e Δl son longitudes, se comprueba que las **unidades** de la permeabilidad (K) son las de una velocidad (L/T).

La expresión correcta de la Ley de Darcy es la siguiente:

$$q = -K \cdot \left(\frac{dh}{dl}\right) \qquad (2)$$

donde: $q = Q$ /sección (es decir: caudal que circula por m^2 de sección)
K = Conductividad hidráulica
dh/dl = gradiente hidráulico expresado en incrementos infinitesimales
(el signo menos se debe a que el nivel disminuye en el sentido del flujo; es decir, que Δh o dh son negativos y el signo menos hace que el caudal sea positivo)

Velocidad real y velocidad de Darcy

Sabemos que en cualquier conducto por el que circula un fluido se cumple que:

$$\text{Caudal} = \text{Sección} \times \text{Velocidad} \qquad (3)$$

$$L^3/T = L^2 \times L/T$$

Si aplicamos esta consideración al cilindro del permeámetro de Darcy, y calculamos la velocidad a partir del caudal y de la sección, que son conocidos, obtendremos una velocidad falsa, puesto que el agua no circula por toda la sección del permeámetro, sino solamente por una pequeña parte de ella. A esa velocidad falsa (la que llevaría el agua si circulara por toda la sección del medio poroso) se denomina "velocidad Darcy" o "velocidad de flujo":

$$\textit{Velocidad Darcy} = \textit{Caudal} \,/\, \textit{Sección total} \qquad (4)$$

La parte de la sección total por la que puede circular el agua es la porosidad eficaz[3]; si una arena tiene una porosidad del 10% (0,10), el agua estaría circulando por el 10% de la sección total del tubo. Y para que el mismo caudal circule por una sección 10 veces menor, su velocidad será 10 veces mayor. Por tanto, se cumplirá que:

$$\textit{Velocidad lineal media} = \textit{Velocidad Darcy} / m_e \qquad (5)$$

$$(m_e = \text{porosidad eficaz})$$

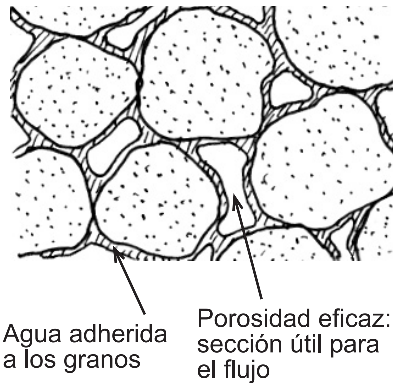


Figura 2.- La parte de la sección utilizable por el flujo es la porosidad eficaz

El resultado de la expresión (5) también se denomina *velocidad real* (es realmente la velocidad a la que las partículas atraviesan una sección del medio poroso, por ejemplo, la mostrada en la figura 2). Pero no es la velocidad que observaríamos desde el exterior del medio poroso al cronometrar el tiempo de recorrido entre dos puntos.

En la figura 3 se muestra un tubo de longitud L_1 lleno de arena por el que se hace circular agua. Evaluaremos la velocidad del agua por dos procedimientos:

1º) Calculamos la *velocidad* mediante la expresión (5).

2º) Medimos experimentalmente el tiempo de recorrido añadiendo un colorante al agua. Con ese tiempo calculamos la velocidad así:

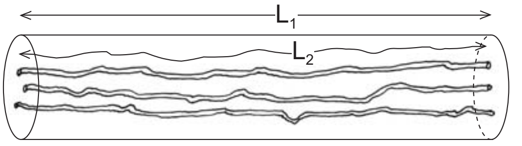


Figura 3.- Tortuosidad del recorrido

$$\textit{Velocidad observada} = \textit{Distancia} / \textit{tiempo} = L_1 / \textit{tiempo} \qquad (6)$$

Esta *velocidad observada* sería inferior a la *calculada* mediante (5), ya que el agua ha tenido que recorrer una distancia mayor (ha recorrido L_2 y no L_1) por lo que aparentemente ha circulado a una velocidad menor. Por tanto, el tiempo real de recorrido entre dos puntos puede ser ligeramente mayor al predicho mediante la expresión (5). La relación entre la velocidad observada desde el exterior del medio poroso y la calculada a partir de Darcy y de la porosidad eficaz será así:

$$\textit{Velocidad observada} = \textit{Velocidad lineal media} / \textit{coeficiente} \qquad (7)$$

Ese coeficiente depende de la tortuosidad del medio poroso, y aproximadamente puede ser de 1,0 a 1,18 en arenas (Freeze y Cherry, p. 71).

En la práctica, habitualmente se utiliza la expresión (5) refiriéndose al resultado como "velocidad real", y se aplica esta velocidad para calcular el tiempo de recorrido del agua subterránea, pero debemos ser conscientes del error que se podemos cometer al despreciar la tortuosidad del recorrido.

En la figura 4 se muestra el vector *velocidad lineal media*.

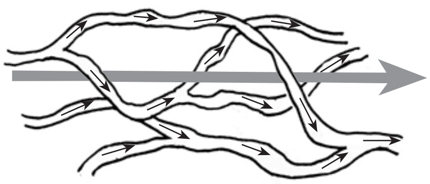


Figura 4- Velocidad lineal media

Flujo a través de varias capas: Permeabilidad equivalente

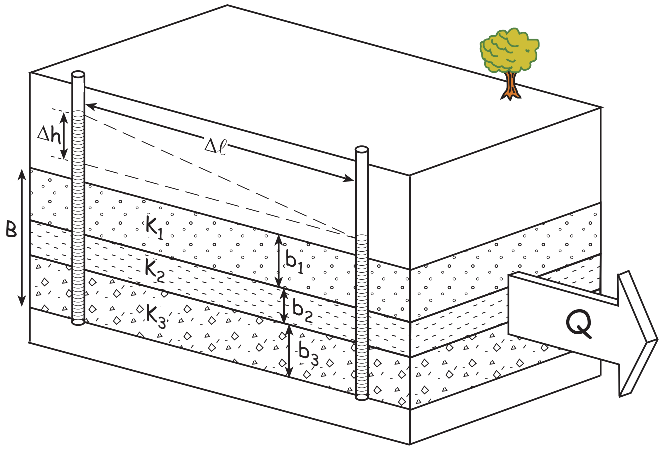
En un medio estratificado, con frecuencia se produce el flujo a través de varias capas, y deseamos aplicar la ley de Darcy globalmente al conjunto de capas. Los dos casos más sencillos son cuando consideramos el flujo paralelo a los contactos entre las capas o el flujo perpendicular a las capas. Suponemos que cada una de las capas es homogénea e isótropa.

[3] Efectivamente, como explicábamos en el tema anterior, el agua no puede fluir por toda la porosidad, ya que el agua adherida a los granos es relativamente inmóvil. Reproducimos una figura del tema anterior.

Permeabilidad (o conductividad hidráulica) *equivalente* es un valor global que podemos asignar al conjunto de capas considerado como una unidad. Y hablaremos de *K equivalente horizontal* (K_h) o *K equivalente vertical* (K_v) refiriéndonos respectivamente a los dos casos citados (suponiendo las capas horizontales, el flujo paralelo a las capas es horizontal, y el flujo perpendicular a las capas es vertical).

(La deducción de las fórmulas se encuentra en el Apéndice II).

Si **el flujo es paralelo a las capas** (los dos sondeos, que suponemos abiertos en todas las capas, indican el gradiente que provoca el flujo), la permeabilidad equivalente (K_h) se calcula con esta expresión:



$$\boxed{K_h = \frac{\left(\sum K_i \cdot b_i\right)}{B}} \qquad (8)$$

siendo:

K_h = conductividad hidráulica horizontal equivalente

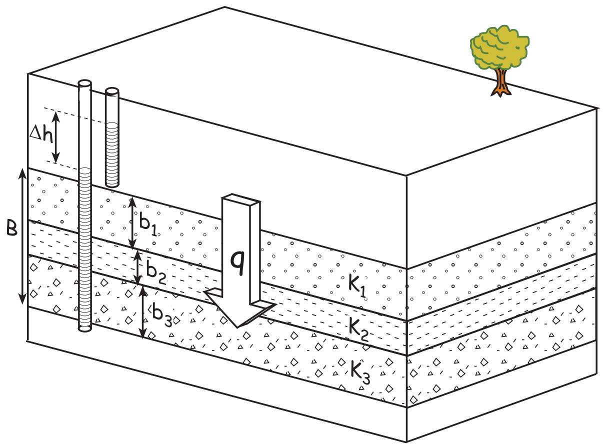
K_i = conductividad hidráulica de cada una de las capas

b_i = espesor de cada una de las capas

B = espesor total, suma de todos los espesores

Teniendo en cuenta que: $K \cdot$ *espesor* = T (transmisividad), la fórmula obtenida equivale a decir que *la transmisividad equivalente del conjunto ($K_h \cdot B$) es igual a la suma de las transmisividades de todas las capas* ($\Sigma K_i \cdot b_i$).

Si **el flujo es perpendicular a las capas** (los dos sondeos, que suponemos abiertos en sus extremos, indican el gradiente que provoca el flujo), la permeabilidad equivalente (K_v)es igual a:



$$\boxed{K_v = \frac{B}{\sum \frac{b_i}{K_i}}} \qquad (9)$$

siendo:

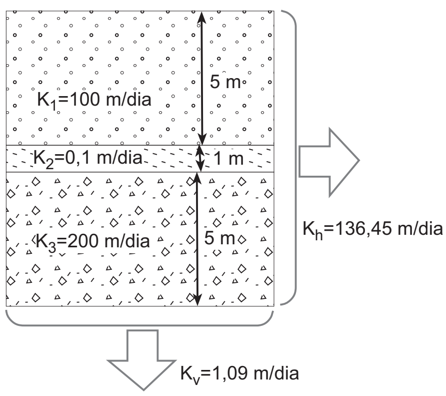
K_v = conductividad hidráulica vertical equivalente

K_i = conductividad hidráulica de cada una de las capas

b_i = espesor de cada una de las capas

B = espesor total, suma de todos los espesores

Ejemplo: Consideramos tres capas: dos capas de arenas gruesas con una intercalación de limos, con los espesores y permeabilidades que se indican en la figura:



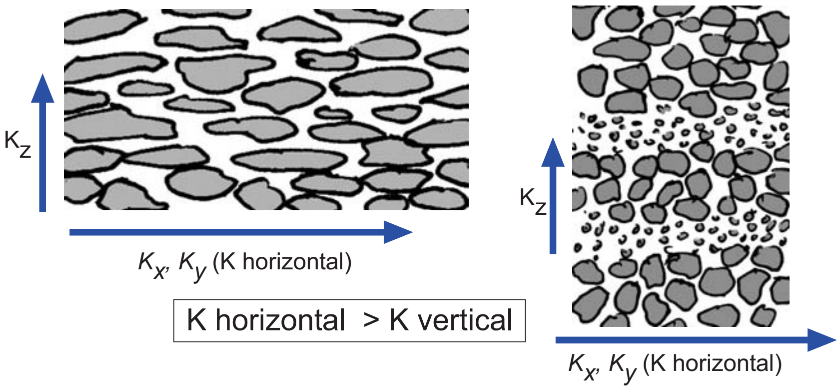
Con las dos expresiones de K_h y K_v obtenemos:

En flujo horizontal: K_h = 136 m/día, la fina capa intermedia es irrelevante, la conductividad hidráulica equivalente se aproxima a la media de las dos capas muy permeables. **La capa impermeable apenas influye**.

En el flujo vertical: K_v = 1,09 m/día. Un metro de material poco permeable influye más en el valor global que 10 metros de materiales muy permeables.

Anisotropía

Con frecuencia la *K* vertical de una formación detrítica es menor que la *K* horizontal, debido a la forma y disposición de los granos (en la figura, a la izquierda), o a la presencia de láminas intercaladas de menor permeabilidad (a la derecha).



Para una descripción matemática del medio permeable, puede ser necesario asignar tres valores K_x, K_y y K_z. Por ejemplo, en el programa MODFLOW debemos introducir los valores de la conductividad hidráulica en las direcciones, aunque generalmente se utiliza $K_x = K_y$.

Generalmente no se dispone de un conocimiento del medio poroso suficiente para poder especificar el valor de la conductividad hidráulica (*K*) en las tres direcciones del espacio: X, Y (horizontales) y Z (vertical) y con frecuencia debemos limitarnos a asignar a una formación geológica un valor de *K* suponiéndolo válido para cualquier dirección (medio isótropo), o estimando que la *K* vertical sea menor que la horizontal.

Limitaciones de la Ley de Darcy

La Ley de Darcy puede no cumplirse por las siguientes razones:

1ª). La constante de proporcionalidad *K* <u>no</u> es propia y característica del medio poroso, sino que también depende del fluido.

El factor *K* puede descomponerse así:

$$K = k\,\frac{\gamma}{\mu} \qquad (10)$$

donde: K = conductividad hidráulica
k = Permeabilidad intrínseca (depende sólo del medio poroso)[4]
γ = peso específico del fluido
μ = viscosidad dinámica del fluido

Podemos modificar la expresión (10), teniendo en cuenta que:

Viscosidad dinámica (μ) = viscosidad cinemática (ν) . densidad (ρ)

---

[4] Esta *k* también se denomina *absolute permability* o *coefficient of permeability* o simplemente *permeability* La denominación de *k* como *permeabilidad* (sin adjetivos) puede generar confusión ya que también se utiliza en el lenguaje común para referimos a la *K* (*conductividad hidráulica*).

$$\text{Peso específico } (\gamma) = \text{densidad } (\rho) \text{ . gravedad } (g)$$

Resultando:
$$K = k \ . \ \frac{g}{\nu} \tag{11}$$

donde: g = aceleración de la gravedad
ν = viscosidad cinemática del fluido

Esta cuestión es fundamental en geología del petróleo o en el flujo de contaminantes, donde se estudian fluidos de diferentes características. En el caso del agua, la salinidad apenas hace variar el peso específico ni la viscosidad. Solamente habría que considerar la variación de la viscosidad con la temperatura, que se duplica de 35 a 5 º C, con lo que se la permeabilidad de Darcy (*K*) sería la mitad y también se reduciría en la misma proporción el caudal circulante por la sección considerada del medio poroso. Las aguas subterráneas presentan mínimas diferencias de temperatura a lo largo del año en un mismo acuífero, pero en otros entornos sí pueden producirse diferencias de temperatura notables.

Por tanto, aunque sabemos que *K* depende tanto del medio como del propio fluido, si estamos considerando el flujo de aguas subterráneas, la variación correspondiente al fluido en una región determinada es despreciable, por lo que a efectos prácticos asumimos que la *K* de Darcy, o conductividad hidráulica es una característica del medio poroso.

(Ver Apéndice I)

2ª). **La relación entre el caudal y el gradiente hidráulico no es lineal en algunas circunstancias**. Esto puede suceder cuando el valor de *K* es muy bajo o cuando las velocidades del flujo son muy altas.

En el primer caso, por ejemplo, si aplicamos la Ley de Darcy para calcular el flujo a través de una formación arcillosa, el caudal que obtendríamos sería muy bajo, pero en la realidad será nulo, no habrá circulación de agua si no se aplican unos gradientes muy elevados.

En el segundo caso, si el agua circula a gran velocidad, el caudal es directamente proporcional a la sección y al gradiente, pero no linealmente proporcional, sino que la función sería potencial:

$$q = -K\left(\frac{dh}{dl}\right)^n \tag{12}$$

donde el exponente *n* es distinto de 1.

Para estudiar este límite de validez de la ley de Darcy se aplica el **número de Reynolds**. Este coeficiente se creó para canales abiertos o tuberías, y en general valores altos indican **régimen turbulento** y valores bajos indican **régimen laminar.** Para medios porosos se aplica la fórmula utilizada para canales o tubos, pero sustituyendo el diámetro de la conducción por el diámetro medio del medio poroso y utilizando la velocidad Darcy:

$$R = \frac{\rho \, \mathrm{v} \, d}{\mu} = \frac{\mathrm{v} \, d}{\nu} \tag{13}$$

Donde: ρ = densidad del fluido (Kg/m^3)
v =velocidad de Darcy (m/s)
d = diámetro medio de los granos (m)
μ = viscosidad dinámica (Pascal·m = $Kg/(m^2 \cdot s)$)
ν = viscosidad cinemática (=μ / ρ) (m^2/s)

Es imposible conocer el grado de turbulencia del flujo a través de un medio poroso, pero experimentalmente se ha observado que deja de cumplirse la Ley de Darcy (el caudal deja de ser *linealmente* proporcional al gradiente) cuando R alcanza un valor que varía entre 1 y 10. (Es decir: R<1, **sí** se cumple Darcy; R >10, **no** se cumple Darcy; R entre 1 y 10, puede cumplirse o no). Esa falta de precisión del valor límite será debida a otros factores diferentes del diámetro medio de los granos: heterometría, forma, etc.

En el flujo subterráneo las velocidades son muy lentas, los valores de R muy bajos, y prácticamente siempre la relación es lineal, salvo en las proximidades de algunas captaciones bombeando caudales elevados.

Apéndice I. Variación de la conductividad hidráulica con el fluido

Aplicando la fórmula (11) a dos fluidos de viscosidades cinemáticas ν_1 y ν_2 respectivamente, y dividiendo miembro a miembro, obtenemos:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \quad ;$$

siendo: K_1 = conductividad hidráulica circulando el fluido de viscosidad ν_1
K_2, = conductividad hidráulica circulando el fluido de viscosidad ν_2

Si en ambos casos el fluido es el agua, la viscosidad varía con la temperatura, de modo que los valores de pueden obtenerse de la tabla siguiente:

temp (ºC)	Densidad (10^3 Kg/m^3)	Viscosidad dinámica (10^{-3}.Kg/(m.s))	Viscosidad cinemática (centistokes =10^{-6} m^2/s)
0	0,99982	1,792	1,792
1	0,99989	1,731	1,731
2	0,99994	1,674	1,674
3	0,99998	1,620	1,620
4	1,00000	1,569	1,569
5	1,00000	1,520	1,520
6	0,99999	1,473	1,473
7	0,99996	1,429	1,429
8	0,99991	1,386	1,386
9	0,99985	1,346	1,346
10	0,99977	1,308	1,308
11	0,99968	1,271	1,271
12	0,99958	1,236	1,237
13	0,99946	1,202	1,203
14	0,99933	1,170	1,171
15	0,99919	1,139	1,140
16	0,99903	1,109	1,110
17	0,99886	1,081	1,082
18	0,99868	1,054	1,055
19	0,99849	1,028	1,030

temp (ºC)	Densidad (10^3 Kg/m^3)	Viscosidad dinámica (10^{-3}.Kg/(m.s))	Viscosidad cinemática (centistokes =10^{-6} m^2/s)
20	0,99829	1,003	1,005
21	0,99808	0,979	0,981
22	0,99786	0,955	0,957
23	0,99762	0,933	0,935
24	0,99738	0,911	0,913
25	0,99713	0,891	0,894
26	0,99686	0,871	0,874
27	0,99659	0,852	0,855
28	0,99631	0,833	0,836
29	0,99602	0,815	0,818
30	0,99571	0,798	0,801
31	0,99541	0,781	0,785
32	0,99509	0,765	0,769
33	0,99476	0,749	0,753
34	0,99443	0,734	0,738
35	0,99408	0,720	0,724
36	0,99373	0,705	0,709
37	0,99337	0,692	0,697
38	0,99300	0,678	0,683
39	0,99263	0,666	0,671

Por ejemplo: para 19 ºC: visc dinámica = $1{,}028.10^{-3}$ Kg/(m.s) ; visc cinemática = $1{,}030.10^{-6}$ m^2/s

Ejemplo: Hemos medido la K de unas arenas circulando agua a 24ºC= 13,8 m/día. Calcular la K con agua a 5ºC.

$$\frac{K_{5^o}}{K_{24^o}} = \frac{\nu_{24^o}}{\nu_{5^o}} \quad ; \qquad K_{5^o} = 13{,}8\ m/día \ .\frac{0{,}913}{1{,}520} = \ 8{,}29\ m/día$$

Lógicamente, los caudales calculados al aplicar la Ley de Darcy variarán en la misma proporción en que varía la K.

Apéndice II. Flujo a través de varias capas: Obtención de las fórmulas de la permeabilidad equivalente

Flujo paralelo a las capas:

Caudal a través de la capa superior por metro de ancho (ver "1 m" en la figura):

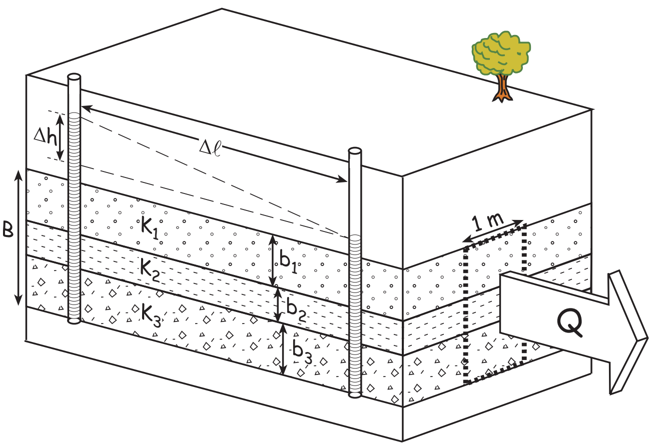
$$Q_1 = -K_1 \cdot [b_1 \cdot 1] \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l}$$

(entre corchetes [ ] figura la sección)

El caudal total será la suma del que circula a través de todas las capas consideradas:

$$Q = \sum Q_i = -\left(\sum K_i \cdot b_i\right) \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l}$$

(el gradiente $\frac{\Delta h}{\Delta l}$ está fuera del sumatorio ya que es común a todas las capas; ver Δh e Δl en la figura)



Q es el caudal que pasa por la sección de anchura unidad y altura el espesor de las capas (rectángulo punteado grueso).

Los dos sondeos están ranurados en las tres capas. (Podrían estar abiertos solamente en un punto cualquiera de su vertical, ya que suponemos que no existe variación del potencial hidráulico en la misma vertical)

También podemos calcular el caudal total Q aplicando la ley de Darcy a todas las capas conjuntamente, utilizando una K_h equivalente (cuyo valor aún desconocemos); llamaremos B a la suma de todos los espesores ($B = \Sigma\, b_i$) :

$$Q = -K_h \cdot [B \cdot 1] \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l}$$

(entre corchetes [ ] figura la sección)

Igualando las dos expresiones anteriores:

$$-\left(\sum K_i \cdot b_i\right) \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l} = -K_h \cdot [B \cdot 1] \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad ; \quad \left(\sum K_i \cdot b_i\right) = K_h \cdot B$$

y despejando K_h obtenemos:

$$\boxed{K_h = \frac{\left(\sum K_i \cdot b_i\right)}{B}}$$

siendo: K_h = conductividad hidráulica horizontal equivalente
Ki = conductividad hidráulica de cada una de las capas
bi = espesor de cada una de las capas
B = espesor total, suma de todos los espesores

Flujo es perpendicular a las capas:

Consideremos el caudal vertical que atraviesa una sección unidad (q= caudal específico o caudal por m² de sección):

Caudal que atraviesa verticalmente el conjunto de capas (el Δh total está indicado en la figura):

$$q = -K_v \cdot \frac{\Delta h}{B}$$

Caudal que atraviesa verticalmente la capa nº 1:

$$q_1 = -K_1 \cdot \frac{\Delta h_1}{b_1}$$

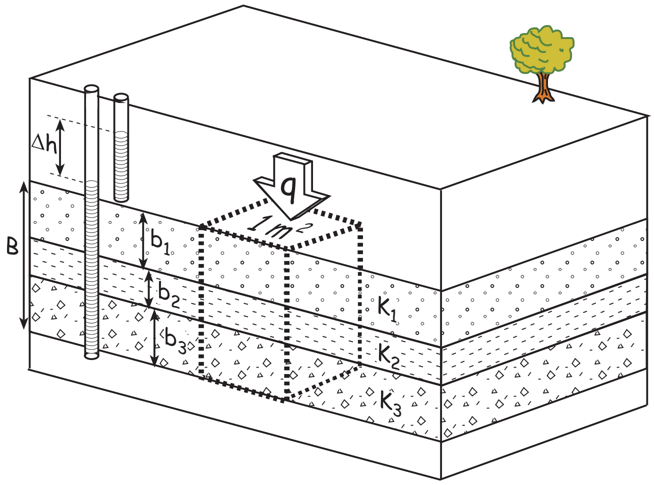
(Δh_1 = diferencia de potencial entre los límites superior e inferior de la capa 1)

Los dos caudales anteriores son iguales, ya que es **el mismo caudal** q el que atraviesa la primera capa (ahí lo hemos llamado q_1), pasa luego a la segunda, etc.; luego igualamos las dos últimas ecuaciones:

$$K_v \cdot \frac{\Delta h}{B} = K_1 \cdot \frac{\Delta h_1}{b_1}$$

Y despejando Δh_1 resulta:

$$\Delta h_1 = K_v \cdot \frac{\Delta h}{B} \cdot \frac{b_1}{K_1}$$



q es el caudal que circula verticalmente por la sección unidad perpendicular a las capas (vertical a través del prisma señalado en punteado grueso).

Los dos sondeos están abiertos en sus extremos (por encima y por debajo de las tres capas).

Aplicando la última expresión a todas las capas y sumando:

$$\sum \Delta h_i = K_v \cdot \frac{\Delta h}{B} \cdot \sum \frac{b_i}{K_i}$$

Como la diferencia de potencial hidráulico de todo el conjunto es la suma de las diferencias de potencial de cada una de las capas ($\sum \Delta h_i = \Delta h$):

$$\Delta h = K_v \cdot \frac{\Delta h}{B} \cdot \sum \frac{b_i}{K_i}$$

Finalmente, despejando Kv :

$$\boxed{K_v = \frac{B}{\sum \frac{b_i}{K_i}}}$$

siendo: K_v = conductividad hidráulica vertical equivalente
K_i = conductividad hidráulica de cada una de las capas
b_i = espesor de cada una de las capas
B = espesor total, suma de todos los espesores