

Hidráulica de captaciones: Fundamentos

Introducción

Si la *Hidráulica subterránea* trata de la física del agua en el medio subterráneo, la *hidráulica de captaciones* estudia concretamente los efectos producidos por la extracción de agua mediante captaciones (excepcionalmente, inyección de agua a través de las captaciones).

Si se trata de una captación vertical, se genera alrededor de ella un **cono de descensos** (Figura 1¹). En los casos de captaciones horizontales (drenes, galerías), la extracción de agua genera un valle en la superficie freática (figura 2).

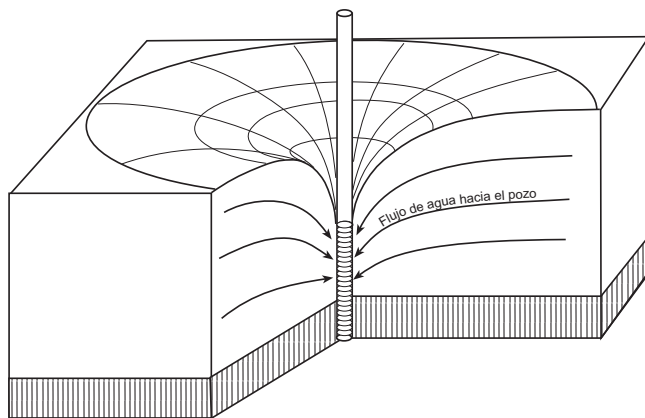


Figura 1.- Cono de descensos alrededor de un sondeo bombeando (Dibujado sobre MARGAT, 1964)

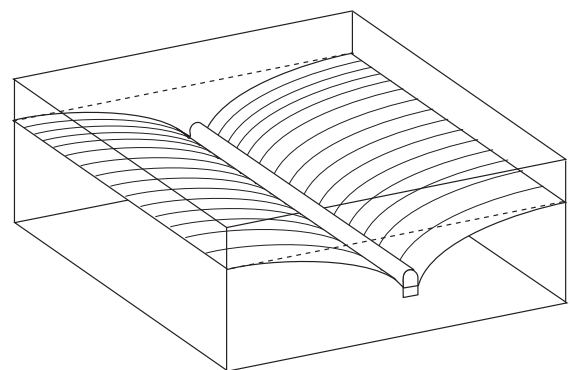


Figura 2.- "Valle" en la superficie freática generado por la extracción de agua subterránea por una captación horizontal

Vamos a centrarnos en el estudio de los efectos producidos por bombeos realizados en **sondeos** (captaciones verticales de pequeño diámetro).

Los **pozos excavados** (captaciones verticales de gran diámetro) también generan un cono alrededor, similar al de los sondeos, pero el cálculo de los descensos generados (la forma del cono) es más complejo, porque parte del caudal extraído proviene del acuífero, mientras que otra parte importante se obtiene del agua almacenada dentro del propio pozo.

La hidráulica de captaciones ofrece múltiples **aplicaciones prácticas**. Si conocemos los parámetros del acuífero (transmisividad, coeficiente de almacenamiento o porosidad eficaz) podremos:

- **Calcular el caudal** que podrá obtenerse sin superar un cierto descenso. Este máximo descenso vendrá determinado por la profundidad del pozo, de la bomba de extracción o por razones económicas o medioambientales.
- **Calcular el descenso** producido por un caudal dado a cierta distancia. Por ejemplo, si ya existe un sondeo y se proyecta una segunda captación, sería deseable realizarla a la distancia suficiente para que ambas no se afecten o lo hagan mínimamente.
- **Calcular el radio del cono de descensos** o *radio de influencia* de la captación. Si a cierta distancia existe en superficie una fuente de contaminación, podremos calcular si el cono de descensos llega hasta el punto contaminante.

Para las aplicaciones indicadas necesitamos conocer los parámetros hidráulicos del acuífero, por tanto, también debemos aprender a calcular dichos parámetros observando los descensos generados por los bombeos (*ensayos de bombeo*).

¹ Margat, J. (1964).- *Notions générales sur l'hydraulique des puits*. Bureau de Recherches Géologiques et Minières, Paris.

En este tema trataremos los **acuíferos confinados y libres en régimen permanente** y el comportamiento de los **acuíferos confinados en régimen variable**.

En otros temas veremos:

- Acuíferos libres en régimen variable
- Acuíferos semiconfinados en régimen permanente y variable ²

Cono de descensos

Supongamos que empezamos a bombear en un acuífero libre cuya superficie freática inicial fuera horizontal. El agua comienza a fluir radialmente hacia el sondeo, y, transcurrido un tiempo, por ejemplo unas horas, la superficie freática habría adquirido la forma que ya hemos mostrado en la figura 2, denominada **cono de descensos**. Para observar el cono de descensos y su evolución, necesitamos otros sondeos en los alrededores del sondeo que bombea, para observación de los niveles. La forma del cono es convexa ya que el flujo necesita un gradiente cada vez mayor para circular por secciones cada vez menores.

En un acuífero libre, es la superficie freática la que toma la forma del cono de descensos. En cambio, si lo que se bombea es un acuífero confinado o semiconfinado, al iniciar el bombeo es la superficie piezométrica la que forma el cono de descensos. (Fig.3-A). En ambos casos hemos supuesto que la superficie freática o piezométrica inicial es horizontal, aunque no siempre es así.

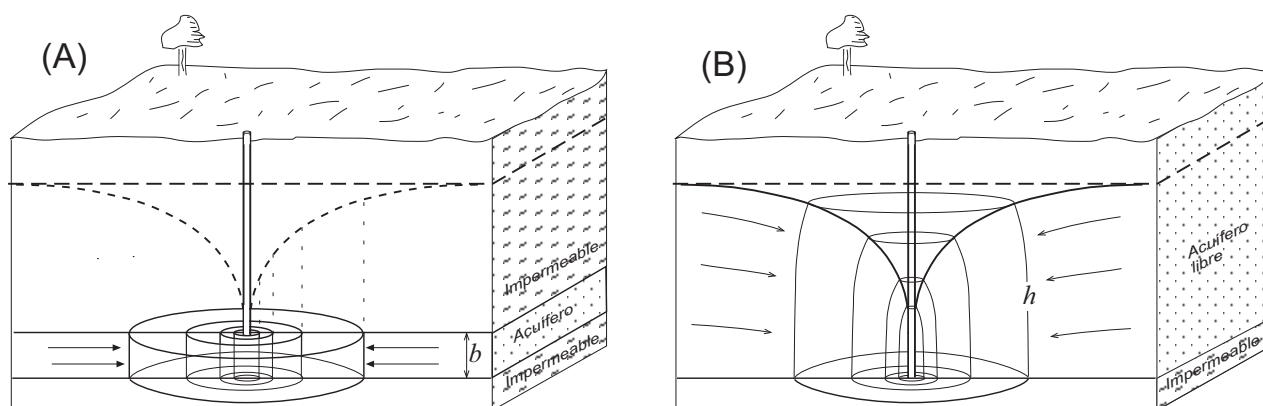


Figura 3.- (A) Cono de descensos y superficies equipotenciales en un acuífero **confinado**.
(B) Idem. en un acuífero **libre**.

En ambos casos, libre y confinado, el agua circula radialmente hacia el sondeo.

En el confinado el flujo es horizontal en el interior del acuífero (espesor b de la figura 3A) y el cono de descensos es una superficie virtual que está por encima del acuífero. A medida que el agua se acerca al sondeo debe atravesar secciones de menor radio; el espesor b del acuífero se mantiene constante. Estos cilindros concéntricos representan también las **superficies equipotenciales**, cuya pérdida progresiva de energía queda reflejada en el cono formado por la superficie piezométrica.

En el acuífero libre el agua circula solamente por la parte saturada del acuífero (espesor h de la figura 3-B), desde el cono hacia abajo. A medida que el agua se acerca al sondeo debe atravesar secciones de menor radio y también de menor altura. Además, las superficies equipotenciales no son exactamente cilindros, ya que el flujo no es perfectamente horizontal.

² http://hidrologia.usal.es/temas/Acuiferos_libres.pdf
<http://hidrologia.usal.es/temas/semiconfinados.pdf>

A medida que pasa el tiempo, el cono de descensos va aumentando tanto en profundidad como en extensión. Estamos en régimen variable. Si en un sondeo de observación próximo al que bombea hemos medido los descensos en varios tiempos sucesivos, observamos que la variación del nivel en ese punto (figura 4a) es más rápida en los primeros momentos, y progresivamente la velocidad del descenso se va ralentizando.

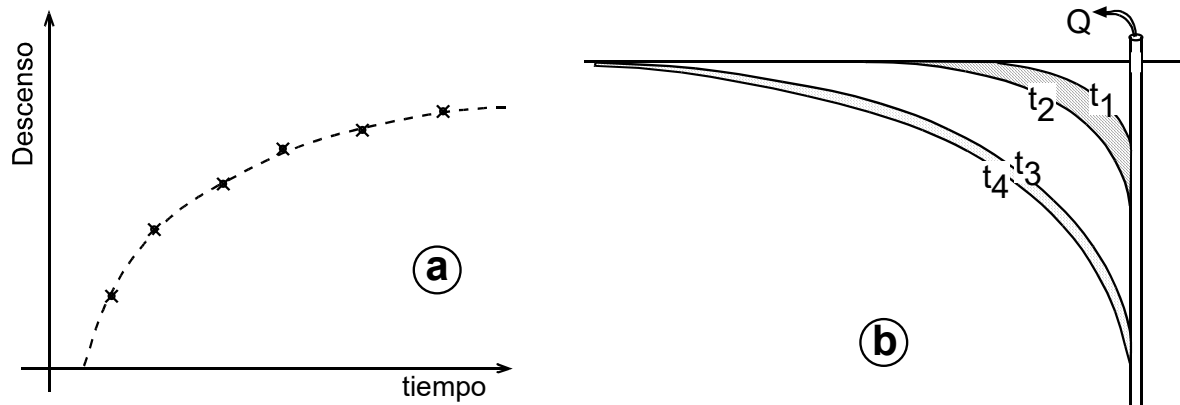


Figura 4. (a) Descenso en un sondeo de observación en función del tiempo. (b) Las franjas entre $t_1 - t_2$ y $t_3 - t_4$ han sido producidas en idénticos incrementos de tiempo y presentan en el dibujo la misma superficie (en la realidad, el mismo volumen). Por eso los descensos son cada vez menores.

Esto es debido a que cuando el cono es mayor, **para liberar el mismo volumen de agua necesita un descenso menor**: en la figura 4b, entre t_1 y t_2 ha transcurrido el mismo tiempo que entre t_3 y t_4 ; si el caudal de bombeo es constante, el volumen de agua liberado en ambos incrementos de tiempo es el mismo, pero el descenso entre t_3 y t_4 es menor. En otras palabras: el área rayada comprendida entre t_1 y t_2 es la misma que entre t_3 y t_4 . Sin embargo, el espesor de la franja entre t_3 y t_4 (descenso generado) es mucho menor.

Las franjas marcadas (los volúmenes representados) en la fig. 4b en un acuífero libre se han vaciado de agua, mientras que si se trata del cono de un confinado reflejan una disminución del potencial hidráulico, que multiplicada por el coeficiente de almacenamiento indica el volumen de agua liberado.

Si el acuífero no recibe alimentación, el descenso continuará cada vez más lentamente y el cono aumentará sin detenerse. Pero en condiciones naturales, el cono de descensos puede tomar agua de un río, un lago o de otro acuífero. Si esto sucede, los descensos se estabilizan, alcanzándose el **régimen permanente o de equilibrio** (Figura 5). En estas condiciones, la forma y tamaño del cono se mantienen aunque el sondeo siga bombeando ininterrumpidamente.

En la realidad, en muchas ocasiones se produce un régimen quasi-permanente, en el que aparentemente no hay variación con el tiempo, pero en un intervalo de tiempo largo, de varios días, puede llegar a apreciarse un descenso de unos pocos centímetros.

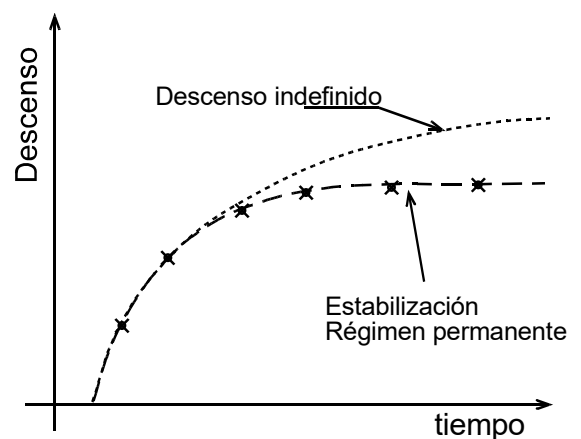


Figura 5.- Estabilización de los descensos después de un cierto tiempo de bombeo.

Fórmulas que expresan la forma del cono de descensos

Desde mediados del siglo XIX se intentó encontrar expresiones matemáticas que reflejaran la forma y evolución del cono de descensos.

Observamos en la figura 6 que la ecuación del cono ha de ser del tipo $s=f(1/r)$ [s =descenso, r =distancia], ya que a mayor distancia, menor descenso. Será función del caudal (Q): si bombeamos un mayor caudal generaremos un cono mayor. Y en régimen variable, será además función del tiempo.

En ambos casos, variable o permanente, será función del acuífero: mejor acuífero, menores descensos. Pero existe una diferencia fundamental: **en régimen**

permanente, el acuífero ya no aporta agua por vaciado de poros (libre) o por descompresión (confinado), sino que **solamente transmite el agua** radialmente hacia el sondeo que bombea. Por tanto, si se trata o no de un “buen acuífero” en régimen permanente dependerá de la transmisividad (T), mientras que en régimen variable dependerá de la transmisividad y del Coeficiente de Almacenamiento (S), que en un acuífero libre corresponde a la porosidad eficaz (m_e).

En resumen, las fórmulas que reflejen la forma del cono han de depender de las siguientes variables:

$$\text{Régimen permanente: } s = f\left(\frac{1}{r}, Q, \frac{1}{T}\right) ; \quad \text{Régimen variable: } s = f\left(\frac{1}{r}, t, Q, \frac{1}{T}, \frac{1}{S}\right)$$

Formas del cono según las características del acuífero

Si el acuífero tiene un mayor coeficiente de almacenamiento (S) o porosidad eficaz (m_e), los descensos serían menores, ya que el acuífero proporciona más agua, y por tanto el tamaño del cono sería menor (Figura 7.a)

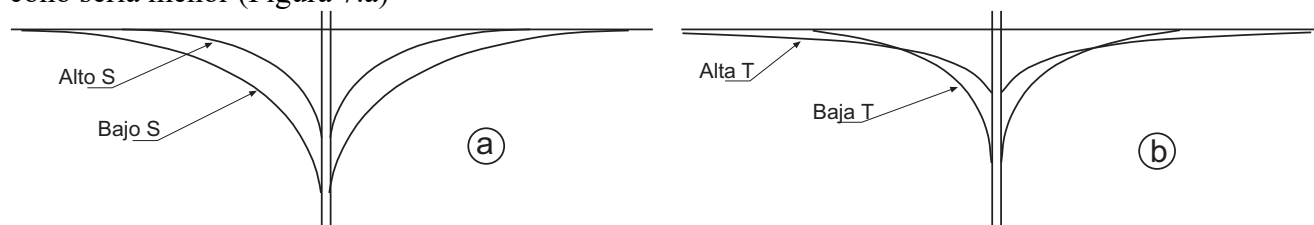


Figura 7.- (a) A igual Transmisividad, el cono es mayor cuanto más bajo es el Coeficiente de Almacenamiento (o m_e). (b) A igual Coeficiente de Almacenamiento (o m_e), la pendiente del cono aumenta cuanto más baja es la Transmisividad

Análogamente, manteniéndose constante el S , si el acuífero tiene una menor transmisividad (T), la pendiente necesaria para que el agua circule será mayor (de nuevo recordamos Darcy: si disminuye la K y/o la sección de paso, para que el caudal circulante sea el mismo debe aumentar el otro factor: el gradiente hidráulico) (Figura 7.b).

En la figura 7-b observamos que la indicación de que el descenso es función de $1/T$ (a mayor T menor descenso) no siempre es cierto. Veremos después que en las fórmulas la T aparece en el numerador y en el denominador.

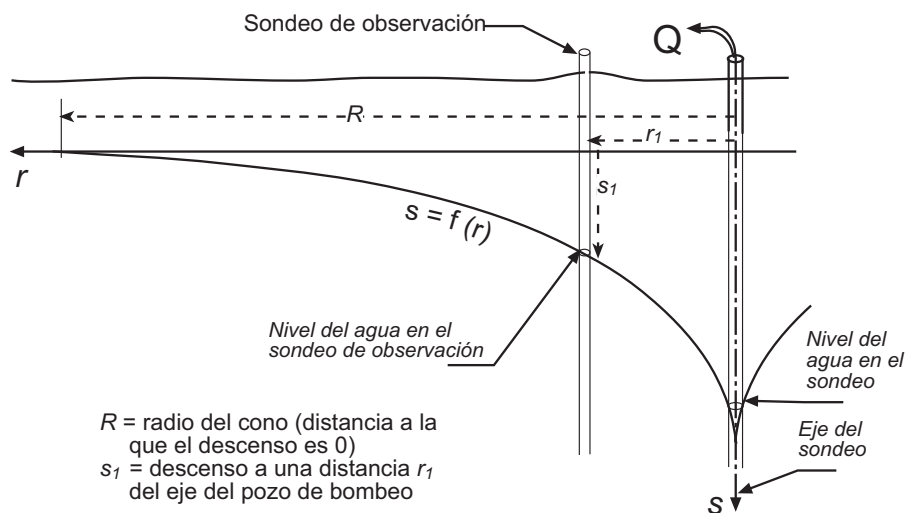


Figura 6.- Corte del cono de descensos. La generatriz del cono corresponde a la ecuación $s=f(r)$

Supuestos Básicos

Las fórmulas más sencillas que nos expresan la forma del cono de descensos se refieren al caso más simple posible que reúne las siguientes características:

- Acuífero confinado perfecto
- Acuífero de espesor constante, isótropo y homogéneo
- Acuífero infinito (sin límites en el ámbito alcanzado por el cono de descensos)
- Superficie piezométrica inicial horizontal (=sin flujo natural)
- Caudal de bombeo constante
- Sondeo vertical, con diámetro infinitamente pequeño (=agua almacenada en su interior despreciable)
- Captación "completa" (= que atraviese el acuífero en todo su espesor)

Posteriormente, las formulaciones básicas, válidas para esas condiciones ideales, se van complicando para adaptarse al incumplimiento de una u otra de las condiciones referidas: acuífero semiconfinado o libre, acuífero que se termina lateralmente por un plano impermeable, bombeo de caudal variable, etc.

Régimen permanente

Vamos a deducir la ecuación que expresa la forma del cono de descensos en régimen permanente y en un **acuífero confinado**.

En la Figura 8 se representa el cono de descensos generado por el flujo radial del agua hacia un sondeo, a través de un **acuífero confinado**, de espesor constante.

Al estar en régimen permanente, el caudal (Q) que estamos extrayendo es **el mismo** que, fluyendo radialmente hacia el sondeo, está atravesando cualquier cilindro concéntrico con el sondeo (Figura 8).

Aplicamos la ley de Darcy al flujo del agua subterránea a través de una de esas secciones cilíndricas, de radio r medido desde el eje del sondeo:

$$Q = K \cdot A \cdot i$$

donde:

Q = caudal que atraviesa la sección de área A (igual al caudal constante que está siendo bombeado)

A = sección por la que circula el agua = $2 \cdot \pi \cdot r \cdot b$

b = espesor del acuífero]

K = permeabilidad del acuífero

i = gradiente hidráulico = dh/dr

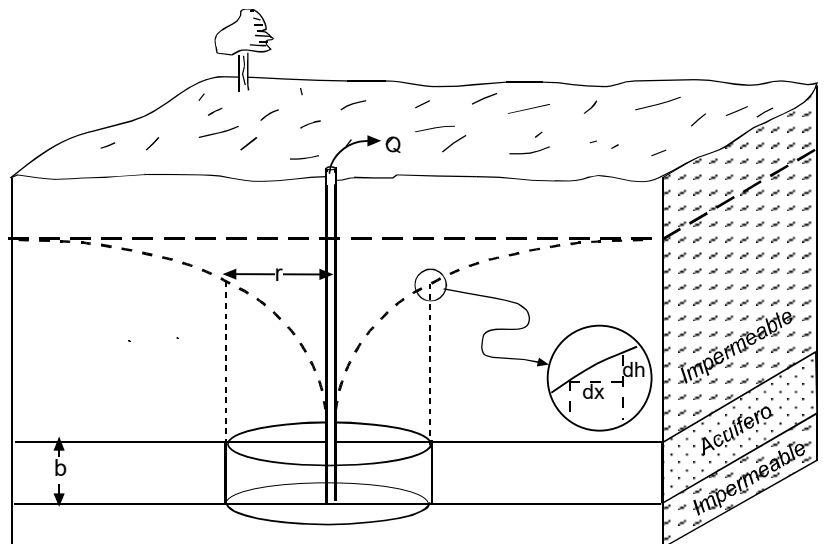


Figura 8. Acuífero confinado en régimen permanente

$$Q = (2 \cdot \pi \cdot r \cdot b) \cdot K \frac{dh}{dr}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\pi b K}{Q} dh$$

Integrando entre r_1 y r_2 (Figura 8):

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{2\pi b K}{Q} \int_{h_1}^{h_2} dh$$

$$[\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{2\pi K b}{Q} [h]_{h_1}^{h_2}$$

$$\ln r_2 - \ln r_1 = \frac{2\pi T}{Q} (h_2 - h_1)$$

$$h_2 - h_1 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

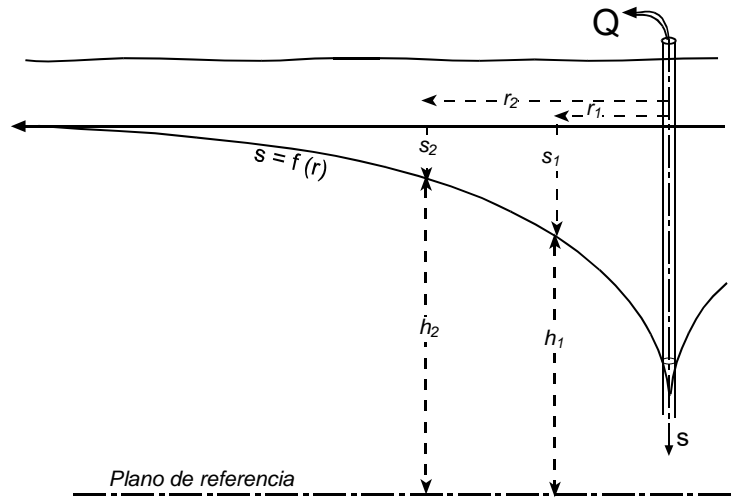


Figura 9.- Niveles y descensos en dos puntos de observación

Como $h_2 - h_1 = s_1 - s_2$ (comprobarlo en la figura 9), la última ecuación puede expresarse así:

$$s_1 - s_2 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (2)$$

Esta expresión se conoce como **fórmula de Dupuit-Thiem**³, y refleja la forma del cono de descensos en función de la distancia, y, tal como habíamos aventurado anteriormente, también en función del caudal y de la transmisividad.

Cálculo del descenso a cualquier distancia: Necesitamos el dato de un solo punto de observación (a una distancia r_1 se ha medido un descenso s_1). Conociendo el caudal, Q , y la transmisividad del acuífero, T , se puede calcular el descenso (s_2) a cualquier distancia (r_2).

Un caso particular sería el cálculo del **descenso en el propio pozo de bombeo**. Para ello debemos conocer los datos r_2 , s_2 y calcular s_1 para una distancia $r_1 =$ radio del pozo. Esto siempre conlleva un error porque el radio efectivo del sondeo no es el mismo que su radio real.

Ejemplo 1.-

En un acuífero **confinado** con un espesor saturado de 15 metros, se bombea un caudal constante de 4,2 litros/seg. hasta alcanzar el régimen permanente. Transmisividad: 54 m²/día. A 25 metros de distancia se mide un descenso de 2,83 m. a) Calcular el descenso producido a 100 metros de distancia del sondeo que bombea.

$$r_1 = 25 \quad ; \quad s_1 = 2,83 \quad ; \quad r_2 = 100 \quad ; \quad s_2 = ?$$

Aplicando la fórmula (2), despejamos s_2 :

$$2,83 - s_2 = \frac{4,2 \cdot 86,4}{2\pi \cdot 54} \ln \frac{100}{25} \quad ; \quad s_2 = 1,35 \text{ metros}$$

El factor 86,4 es para convertir litros/seg en m³/día. (un día tiene 86400 segundos)

Cálculo del radio del cono ("radio de influencia"): Basta calcular la distancia a la que el descenso es 0. Para ello, tomaremos la pareja de valores: $r_2 = R$; $s_2 = 0$, con lo que la fórmula (2) resulta:

$$s_1 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r_1} \quad (3)$$

Ejemplo 2.-

Con los mismos datos del ejemplo anterior, calcular el radio del cono de descensos.

Solución:

Aplicando la expresión (3):

³ El francés Dupuit (1863) la desarrolló inicialmente (curiosa coincidencia, Dupuit significa *del pozo*), mientras que el alemán A. Thiem (1870, 1887) la aplicó para el cálculo de la Transmisividad del acuífero: los "bombeos de ensayo" que veremos en el apartado siguiente. También se cita con frecuencia el trabajo posterior de G. Thiem (1906)

$$2,83 = \frac{4,2 \cdot 86,4}{2 \pi \cdot 54} \ln \frac{R}{25} ; R = 352 \text{ metros}$$

Bombeos de ensayo

En general, un *bombeo de ensayo* (en inglés: *test pumping* o *pumping test*) es un bombeo realizado para medir los parámetros hidráulicos del acuífero, en el caso del régimen permanente sólo la Transmisividad.

Para ello necesitamos dos puntos de observación, dos sondeos que estén abiertos en el mismo acuífero que se está bombeando (como en el esquema de la figura 9). Se miden las distancias y los descensos (a una distancia r_1 , el descenso estabilizado es de s_1 metros; a una distancia r_2 , el descenso es de s_2 metros), y, conocido el caudal de bombeo, Q , se despeja T .

Ejemplo 3.-

En un acuífero **confinado** con un espesor de 11 metros, se bombea un caudal constante de 3,5 litros/seg. hasta alcanzar el régimen permanente. Se miden los siguientes descensos: a 20 metros de distancia, descenso: 1,87 m.; a 95 metros de distancia, descenso: 0,39 metros. Calcular la transmisividad.

Solución:

$$r_1=20 ; s_1=1,87 ; r_2=95 ; s_2=0,39$$

Aplicando la fórmula (2), despejamos T :

$$s_1 - s_2 = \frac{Q}{2 \pi T} \ln \frac{r_2}{r_1} ; 1,87 - 0,39 = \frac{3,5 \cdot 86,4}{2 \pi T} \ln \frac{95}{20} ; T = 50,7 \text{ m}^2/\text{dia}$$

Estos cálculos se pueden realizar gráficamente, lo que es especialmente aconsejable si disponemos de más de dos puntos de observación. Se representan los descensos en función de $\log(r)$ (Figura 10), obteniendo una recta, ya que en la fórmula de Dupuit los descensos son una función lineal de los logaritmos de las distancias. El radio del cono se lee directamente, y de la pendiente de la recta se calcula la T . A mayor T , menor pendiente: pensemos que **este gráfico es una imagen deformada del cono de descensos**, y habíamos visto (figura 7) que al aumentar la transmisividad, disminuye la pendiente del cono.

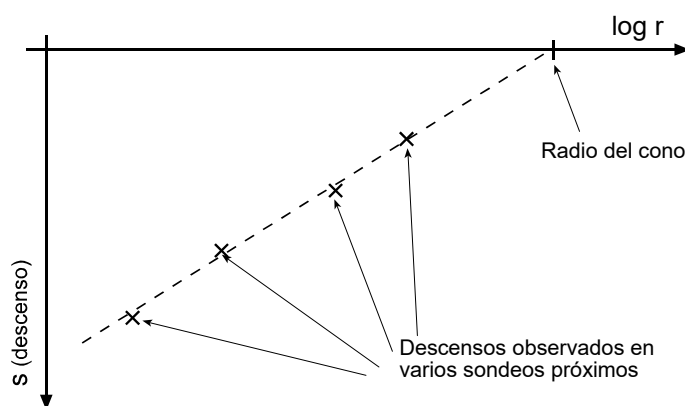


Figura 10.- Datos para un bombeo de ensayo en régimen permanente

Aplicación de la fórmula Dupuit-Thiem a acuíferos libres

La deducción que hemos realizado para obtener la fórmula (2) no es válida para **acuíferos libres**, ya que no se cumplen varios presupuestos, el principal: que el espesor (b) no es constante; en acuíferos libres se trata del espesor saturado, que disminuye al aproximarse al sondeo (Figura 3,B). No obstante, el error es aceptable si los descensos producidos son despreciables frente al espesor saturado del acuífero; habitualmente se acepta si los descensos no superan el 10% ó el 15% de dicho espesor, aunque esta condición no se cumplirá en las proximidades del pozo que bombea, en acuíferos libres de poco espesor.

Si el descenso supera el 15% del espesor saturado inicial, la fórmula (2) puede utilizarse introduciendo en ella “descensos corregidos”, como se explica en el **Anexo II** :

$$s' = s - (s^2/2h_o) \quad (4)$$

Inversamente:

$$s = h_o - \sqrt{h_o^2 - 2 \cdot s' \cdot h_o} \quad (5)$$

s = descenso e el acuífero libre

s' = descenso equivalente que se produciría si fuera confinado (si el espesor fuera constante)

h_o = espesor saturado inicial

Ejemplo 4 (equivalente al ejemplo 3).-

En un acuífero **libre** con un espesor saturado inicial de 11 metros, se bombea un caudal constante de 3,5 litros/seg. hasta alcanzar el régimen permanente. Se miden los siguientes descensos: a 20 metros de distancia, descenso: 1,87 m.; a 95 metros de distancia, descenso: 0,39 metros. Calcular la transmisividad.

Solución:

Calculamos los descensos equivalentes (s') mediante la fórmula (4):

$$\begin{aligned} r_1=20 & \quad ; \quad s_1=1,87 & \quad ; \quad s'_1=1,71 \\ r_2=95 & \quad ; \quad s_2=0,39 & \quad ; \quad s'_2=0,38 \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula (2) con los descensos corregidos s' , despejamos T :

$$s'_1 - s'_2 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad ; \quad 1,71 - 0,38 = \frac{3,5 \cdot 86,4}{2\pi T} \ln \frac{95}{20} \quad ; \quad T = 56,5 \text{ m}^2/\text{dia}$$

Ejemplo 5 (equivalente al ejemplo 1).-

En un acuífero **libre** con un espesor saturado inicial de 15 metros, se bombea un caudal constante de 4,2 litros/seg. hasta alcanzar el régimen permanente. Transmisividad: 54 m²/dia. A 25 metros de distancia se mide un descenso de 2,83 m. Calcular el descenso producido a 100 metros de distancia del sondeo que bombea.

Solución:

Calculamos el descenso equivalente (s') mediante la fórmula (4):

$$\begin{aligned} r_1=25 & \quad ; \quad s_1=2,83 & \quad ; \quad s'_1=2,56 \\ r_2=95 & \quad ; \quad s_2=? & \quad ; \quad s'_2=? \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula (2) con el descenso corregido s'_1 , despejamos s'_2 :

$$s'_1 - s'_2 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad ; \quad 2,56 - s'_2 = \frac{4,2 \cdot 86,4}{2\pi \cdot 54} \ln \frac{100}{25} \quad ; \quad s'_2 = 1,08 \text{ metros}$$

El valor obtenido (s'_2) sería el descenso a 100 metros si el espesor del acuífero fuera constante. Para el acuífero libre, aplicamos la fórmula (5):

$$s = h_o - \sqrt{h_o^2 - 2 \cdot s'_2 \cdot h_o} \quad ; \quad s_2 = 15 - \sqrt{15^2 - 2 \cdot 1,08 \cdot 15} = 1,12 \text{ metros}$$

Régimen variable (acuífero confinado)

Fórmula de Theis

La primera expresión matemática que refleja la forma del cono de descenso en régimen variable se debe a Theis, que en 1935 la elaboró a partir de la similitud entre el flujo del agua y el flujo de calor, estudiando el flujo radial del calor en una placa. La expresión es:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad (6) \quad ; \quad \text{donde:} \quad u = \frac{r^2 S}{4Tt} \quad (7)$$

- Q = Caudal de bombeo constante
- T, S = Transmisividad y coeficiente de almacenamiento del acuífero
- t = tiempo transcurrido desde el comienzo del bombeo
- s = descenso
- r = distancia a la que se produce el descenso s

u no es una variable que tenga significado físico, sólo se trata de una abreviatura en la formulación.

$W(u)$ es una función compleja de u bien conocida en Matemáticas, que en Hidráulica se denomina "función de pozo" (se utiliza W es porque *pozo* en inglés es *Well*):

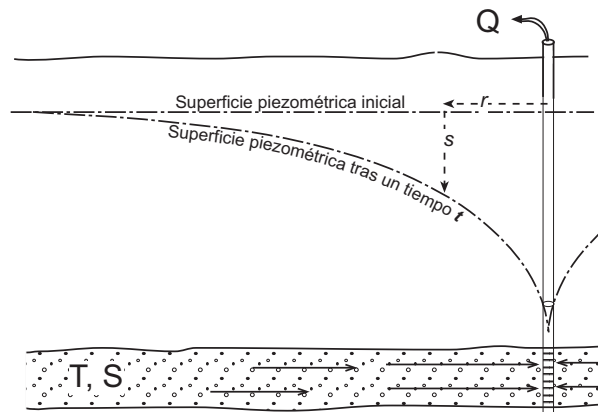


Figura 11 .- Cono de descensos en régimen variable, acuífero confinado

$$W(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (8)$$

La solución de esta integral para los distintos valores de u aparece tabulada en todos los textos de Hidrogeología (por ejemplo, en Watson (1995), pág.351). En un **Anexo** incluimos una versión simplificada de dicha tabla, suficiente para un cálculo aproximado.

Esta integral puede expresarse en forma de *serie* (suma de infinitos sumandos), así:

$$W(u) = -0,5772 - \ln u + u - \frac{u^2}{2.2!} + \frac{u^3}{3.3!} - \dots \quad (9)$$

Ejemplo 6.-

En un acuífero confinado con Transmisividad: $54 \text{ m}^2/\text{día}$ y coeficiente de almacenamiento $S = 3 \cdot 10^{-5}$, se bombea un caudal constante de $4,2 \text{ litros/seg.}$ Calcular el descenso producido a 100 metros de distancia del sondeo que bombea, tras 5 horas de bombeo.

Solución:

Calculamos u mediante la fórmula (7), convirtiendo el tiempo de horas a días :

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} \quad ; \quad u = \frac{150^2 \cdot 3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 54 \cdot \frac{5}{24}} = 0,015$$

Evaluamos el valor de $W(u)$ correspondiente a $u = 0,015$ mediante la tabla del Apéndice I: $W(u) = 3,637$

Finalmente, calculamos el descenso mediante la fórmula (6):

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad ; \quad s = \frac{4,2 \cdot 86,4}{4 \cdot \pi \cdot 54} 3,637 = 1,94 \text{ m.}$$

Fórmula de Jacob⁴

Se aprecia que en la serie (9) que expresa $W(u)$, si u tiene un valor pequeño, la suma del tercer sumando y sucesivos es despreciable frente a los dos primeros. Sustituyendo en (6) $W(u)$ por los dos primeros sumandos ($-0,5772 - \ln u$), y sustituyendo u por su valor (7), se obtiene la expresión:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u) = \frac{Q}{4\pi T} (-0,5772 - \ln u) = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2,25 \cdot Tt}{r^2 S} \quad (10)$$

Si preferimos trabajar con logaritmos decimales:

$$s = 0,183 \frac{Q}{T} \log \frac{2,25 \cdot Tt}{r^2 S} \quad (11)$$

Las expresiones (10) u (11) son la *simplificación de Jacob de la fórmula de Theis*, y permiten el cálculo de descensos en régimen variable sin necesidad del uso de la tabla de $W(u)$ para valores de u pequeños.

Suele adoptarse el valor de $u < 0,03$ para que esta simplificación sea aceptable. Estos valores pequeños de u se dan con valores grandes de t y pequeños de r : en general, no es aplicable en los primeros momentos del bombeo.

Ejemplo 7.-

Para el mismo problema planteado en el ejemplo 6, calcular el descenso mediante la fórmula de Jacob.

Solución:

Primero debemos comprobar que u es pequeño mediante la fórmula (7); en el ejemplo 5 ya lo hemos calculado, y obtuvimos que $u = 0,015$, luego sí es aceptable la simplificación de Jacob ($u < 0,03$)

$$\text{Calculamos el descenso mediante la fórmula (11):} \quad s = 0,183 \frac{4,2 \cdot 86,4}{54} \log \frac{2,25 \cdot 54 \cdot \frac{5}{24}}{150^2 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = 1,94 \text{ metros}$$

Obteniendo el mismo valor que por la fórmula de Theis, ya que el valor de u era muy pequeño.

Tanto con la fórmula de Theis como con la simplificación de Jacob, si repetimos el cálculo para varias distancias, podremos dibujar el cono de descensos en un instante dado t .

⁴ Cooper y Jacob, 1946

Bombes de ensayo (descensos-tiempos)

En un bombeo de ensayo en régimen variable bombeamos un caudal constante mientras que en otro sondeo próximo abierto en el mismo acuífero (Figura 12) mediremos la evolución del descenso con el tiempo. Representando gráficamente la evolución de los descensos en función del tiempo y tras unos cálculos sencillos, obtendremos los parámetros hidráulicos del acuífero, T y S .

Para la interpretación mediante la fórmula de Theis se representan en un gráfico $\log s - \log t$ y la curva resultante se superpone a una curva patrón.

Para la interpretación mediante la simplificación de Jacob, se representan los descensos (s) en función de $\log t$, debiendo resultar una recta: efectivamente, en la expresión de Jacob se aprecia que el descenso es un función lineal del tiempo.

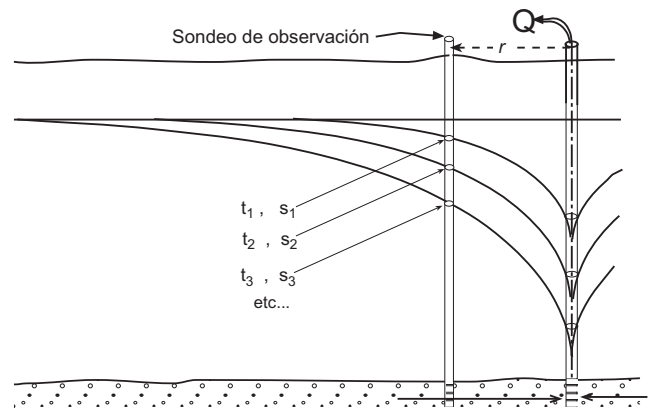


Figura 12.- Datos para un bombeo de ensayo en régimen variable

Ejemplos de bombes de ensayo:

Método de Theis: http://hidrologia.usal.es/practicac/confinado/Theis_EXPLICACION.pdf

Método de Jacob: http://hidrologia.usal.es/practicac/confinado/Jacob_EXPLICACION.pdf

Bombes de ensayo (descensos-distancias)

Hemos visto que en **régimen permanente** utilizamos datos **distancias-descensos** (varios puntos de observación), mientras que en **régimen variable** los datos necesarios son **tiempos-descensos** (medidos en un solo punto de observación).

También es posible calcular los parámetros del acuífero en **régimen variable** si disponemos de dos o más parejas de valores **distancias-descensos**. Si representamos los descensos en función de la distancia (todos medidos simultáneamente, para un tiempo t) obtendremos una recta (figura del ejemplo siguiente); efectivamente, en las ecuaciones (10) u (11) vemos que el descenso es una función lineal del logaritmo de la distancia.

Aplicando la ecuación de Jacob (10) a dos puntos de la recta y restando miembro a miembro:

$$s_1 = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2,25.Tt}{r_1^2 S} ; s_2 = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2,25.Tt}{r_2^2 S} ; s_1 - s_2 = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} ; \boxed{s_1 - s_2 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (12)$$

Obtenemos la misma ecuación (3) de Dupuit-Thiem, aunque en este caso no es en régimen permanente sino que refleja los descensos para un tiempo t , en régimen variable.

Ejemplo 8.-

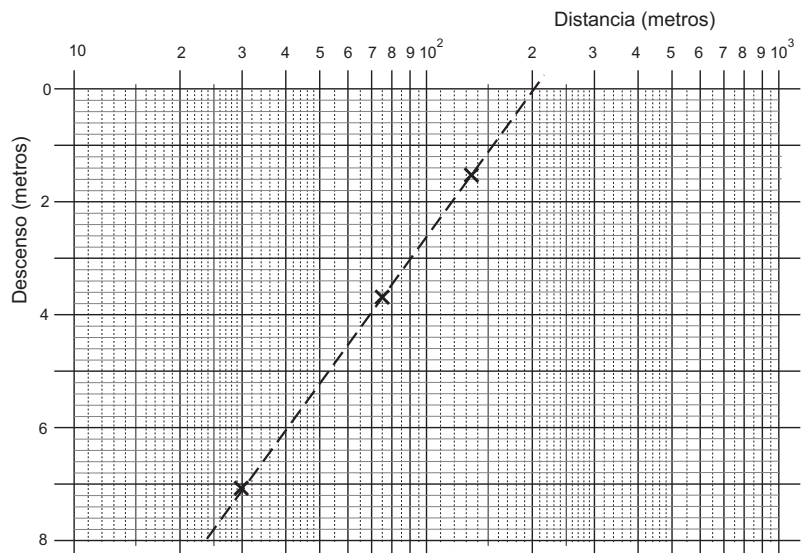
Un sondeo bombea en un acuífero confinado un caudal constante de 12 litros/seg. Tras 2 horas de bombeo (estamos en régimen variable), se miden los descensos en tres sondeos próximos (abiertos en el mismo acuífero):

A 30 metros: descenso=7,05 metros

A 75 metros: descenso=3,69 metros

A 135 metros: descenso=1,54 metros

Representamos estas parejas de valores en un gráfico "descensos-log(distancia)":



Aplicando en la ecuación (12) dos parejas de valores, despejamos la transmisividad T . (Aquí vamos a utilizar dos puntos de los tres medidos, mejor usar dos puntos de la recta):

$$7,05 - 1,54 = \frac{12 \cdot 86,4}{4\pi T} \ln \frac{135^2}{30^2} \quad ; \quad T = 55,9 \text{ m}^2/\text{día}$$

Aquí terminaba el proceso en régimen permanente, pero ahora podemos obtener el coeficiente de almacenamiento.

Prolongando la recta hasta el eje de abscisas (eje superior, descenso=0), obtenemos el punto de coordenadas: $r=200$ metros ; $s = 0$ metros. Esa distancia ($r=200$) es el radio R del cono a las 2 horas de bombeo.

Aplicando la ecuación (10) a este punto, obtenemos:

$$0 = \left(\frac{Q}{4\pi T} \right) \left(\ln \frac{2,25 \cdot Tt}{R^2 S} \right)$$

Hemos incluido los paréntesis para mostrar que el producto de dos factores es igual a 0. Como el primer factor no es 0, debe serlo el segundo. Por tanto, la fracción dentro del logaritmo debe ser 1 (ya que $\ln 1 = 0$):

$$\frac{2,25 \cdot Tt}{R^2 S} = 1 \quad ; \quad \frac{2,25 \cdot 55,9 \cdot \frac{2}{24}}{200^2 S} = 1 \quad ; \quad S = 2,6 \cdot 10^{-4}$$

Para resolver el mismo problema en un **acuífero libre** se puede aplicar este mismo procedimiento, pero corrigiendo previamente mediante la fórmula (4) los descensos medidos; en el cálculo final, la S correspondería a la porosidad eficaz.

No obstante, esto sería una mera aproximación, ya que el régimen variable en acuíferos libres es más complejo. (http://hidrologia.usal.es/temas/Acuiferos_libres.pdf)

Resumen

Hemos visto que las fórmulas se pueden aplicar en ambos sentidos:

- (a) Si se conocen los parámetros hidráulicos del acuífero, podemos **evaluar el comportamiento del acuífero ante el bombeo** (calcular descensos, o qué caudal extraer para no superar un cierto descenso)
- (b) Si se conoce el comportamiento del acuífero ante el bombeo (hemos medido caudal y descensos), podemos **calcular los parámetros hidráulicos del acuífero**.

En ambas situaciones, y según se trate de régimen permanente o variable, los datos que deben tomarse en el campo y lo que podemos obtener de los cálculos se resumen así:

	Ref. permanente	Reg. variable	
Conocidos los parámetros del acuífero, calculamos los descensos	<i>Datos:</i> $Q, T; s_1, r_1$ en un pozo de observación <i>Calculamos:</i> El descenso a cualquier otra distancia	<i>Datos:</i> Q, T, S <i>Calculamos:</i> El descenso a cualquier distancia r y transcurrido un tiempo t .	
Bombeo de ensayo: Medimos descensos, calculamos los parámetros del acuífero	<i>Datos:</i> Q Al menos dos sondeos de observación ($s_1, r_1; s_2, r_2$) <i>Calculamos:</i> La Transmisividad	<i>Datos:</i> Q En un sondeo de observación, a una distancia r : $t_1, s_1; t_2, s_2; t_3, s_3$ etc... <i>Calculamos:</i> T y S	<i>Datos:</i> Q , tiempo t Al menos dos sondeos de observación ($s_1, r_1; s_2, r_2$) <i>Calculamos:</i> T y S

Anexo I: Valores de $W(u)$ para distintos valores de u

	x 1	x 0,1	x 0,01	x 10 ⁻³	x 10 ⁻⁴	x 10 ⁻⁵	x 10 ⁻⁶	x 10 ⁻⁷	x 10 ⁻⁸	x 10 ⁻⁹	x 10 ⁻¹⁰
1,0	0,2194	1,8229	4,0379	6,3315	8,6332	10,9357	13,2383	15,5409	17,8435	20,1460	22,4486
1,2	0,1584	1,6595	3,8576	6,1494	8,4509	10,7534	13,0560	15,3586	17,6611	19,9637	22,2663
1,4	0,1162	1,5241	3,7054	5,9955	8,2968	10,5992	12,9018	15,2044	17,5070	19,8096	22,1122
1,6	0,08631	1,4092	3,5739	5,8621	8,1633	10,4657	12,7683	15,0709	17,3735	19,6760	21,9786
1,8	0,06471	1,3098	3,4581	5,7445	8,0455	10,3479	12,6505	14,9531	17,2557	19,5583	21,8608
2,0	0,04890	1,2226	3,3547	5,6394	7,9402	10,2426	12,5451	14,8477	17,1503	19,4529	21,7555
2,2	0,03719	1,1454	3,2614	5,5443	7,8449	10,1473	12,4498	14,7524	17,0550	19,3576	21,6602
2,4	0,02844	1,0762	3,1763	5,4575	7,7579	10,0603	12,3628	14,6654	16,9680	19,2706	21,5732
2,6	0,02185	1,0139	3,0983	5,3776	7,6779	9,9802	12,2828	14,5854	16,8879	19,1905	21,4931
2,8	0,01686	0,9573	3,0261	5,3037	7,6038	9,9061	12,2087	14,5113	16,8138	19,1164	21,4190
3,0	0,01305	0,9057	2,9591	5,2349	7,5348	9,8371	12,1397	14,4423	16,7448	19,0474	21,3500
3,2	0,01013	0,8583	2,8965	5,1706	7,4703	9,7726	12,0751	14,3777	16,6803	18,9829	21,2855
3,4	0,007891	0,8147	2,8379	5,1102	7,4097	9,7120	12,0145	14,3171	16,6197	18,9223	21,2249
3,6	0,006160	0,7745	2,7827	5,0532	7,3525	9,6548	11,9574	14,2599	16,5625	18,8651	21,1677
3,8	0,004820	0,7371	2,7306	4,9993	7,2985	9,6007	11,9033	14,2059	16,5085	18,8110	21,1136
4,0	0,003779	0,7024	2,6813	4,9482	7,2472	9,5495	11,8520	14,1546	16,4572	18,7598	21,0623
4,2	0,002969	0,6700	2,6344	4,8996	7,1985	9,5007	11,8032	14,1058	16,4084	18,7110	21,0135
4,4	0,002336	0,6397	2,5899	4,8533	7,1520	9,4541	11,7567	14,0593	16,3619	18,6644	20,9670
4,6	1,841E-03	0,6114	2,5474	4,8091	7,1075	9,4097	11,7122	14,0148	16,3174	18,6200	20,9226
4,8	1,453E-03	0,5848	2,5068	4,7667	7,0650	9,3671	11,6697	13,9723	16,2748	18,5774	20,8800
5,0	1,148E-03	0,5598	2,4679	4,7261	7,0242	9,3263	11,6289	13,9314	16,2340	18,5366	20,8392
5,2	9,086E-04	0,5362	2,4306	4,6871	6,9850	9,2871	11,5896	13,8922	16,1948	18,4974	20,8000
5,4	7,198E-04	0,5140	2,3948	4,6495	6,9473	9,2494	11,5519	13,8545	16,1571	18,4596	20,7622
5,6	5,708E-04	0,4930	2,3604	4,6134	6,9109	9,2130	11,5155	13,8181	16,1207	18,4233	20,7259
5,8	4,532E-04	0,4732	2,3273	4,5785	6,8758	9,1779	11,4804	13,7830	16,0856	18,3882	20,6908
6,0	3,601E-04	0,4544	2,2953	4,5448	6,8420	9,1440	11,4465	13,7491	16,0517	18,3543	20,6569
6,2	2,864E-04	0,4366	2,2645	4,5122	6,8092	9,1112	11,4137	13,7163	16,0189	18,3215	20,6241
6,4	2,279E-04	0,4196	2,2346	4,4806	6,7775	9,0795	11,3820	13,6846	15,9872	18,2897	20,5923
6,6	1,816E-04	0,4036	2,2058	4,4501	6,7467	9,0487	11,3512	13,6538	15,9564	18,2590	20,5616
6,8	1,448E-04	0,3883	2,1779	4,4204	6,7169	9,0189	11,3214	13,6240	15,9265	18,2291	20,5317
7,0	1,155E-04	0,3738	2,1508	4,3916	6,6879	8,9899	11,2924	13,5950	15,8976	18,2001	20,5027
7,2	9,219E-05	0,3599	2,1246	4,3636	6,6598	8,9617	11,2642	13,5668	15,8694	18,1720	20,4745
7,4	7,364E-05	0,3467	2,0991	4,3364	6,6324	8,9343	11,2368	13,5394	15,8420	18,1446	20,4472
7,6	5,886E-05	0,3341	2,0744	4,3100	6,6057	8,9076	11,2101	13,5127	15,8153	18,1179	20,4205
7,8	4,707E-05	0,3221	2,0503	4,2842	6,5798	8,8817	11,1842	13,4868	15,7893	18,0919	20,3945
8,0	3,767E-05	0,3106	2,0269	4,2591	6,5545	8,8563	11,1589	13,4614	15,7640	18,0666	20,3692
8,2	3,015E-05	0,2996	2,0042	4,2346	6,5298	8,8317	11,1342	13,4367	15,7393	18,0419	20,3445
8,4	2,415E-05	0,2891	1,9820	4,2107	6,5057	8,8076	11,1101	13,4126	15,7152	18,0178	20,3204
8,6	1,936E-05	0,2790	1,9604	4,1874	6,4822	8,7840	11,0865	13,3891	15,6917	17,9943	20,2969
8,8	1,552E-05	0,2694	1,9393	4,1646	6,4592	8,7610	11,0635	13,3661	15,6687	17,9713	20,2739
9,0	1,245E-05	0,2602	1,9187	4,1423	6,4368	8,7386	11,0411	13,3437	15,6462	17,9488	20,2514
9,2	9,988E-06	0,2513	1,8987	4,1205	6,4148	8,7166	11,0191	13,3217	15,6243	17,9268	20,2294
9,4	8,018E-06	0,2428	1,8791	4,0992	6,3934	8,6951	10,9976	13,3002	15,6028	17,9053	20,2079
9,6	6,439E-06	0,2347	1,8599	4,0783	6,3723	8,6740	10,9765	13,2791	15,5817	17,8843	20,1869
9,8	5,173E-06	0,2269	1,8412	4,0579	6,3517	8,6534	10,9559	13,2585	15,5611	17,8637	20,1662

Por ejemplo, para $u = 0,0015 \rightarrow W(u) = 5,9266$

Anexo II: Régimen permanente en acuíferos libres

Es complejo aplicar la formulación de Dupuit-Thiem a un acuífero libre. Para abordar el problema debemos admitir ciertas simplificaciones⁵: 1) El flujo es horizontal. 2) El gradiente es el de la superficie freática. 3) La velocidad es constante en una misma vertical

Observando la figura II.1 (a), observamos que no se cumple ninguna de las tres suposiciones del párrafo anterior; no obstante, podemos suponer que se cumplieran [figura II.1 (b)], lo que conlleva un error en general despreciable.

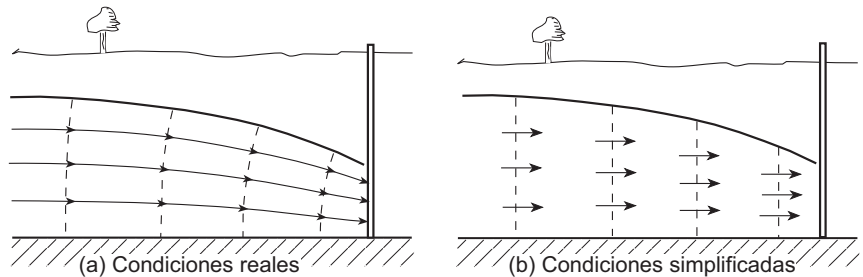


Fig. II.1.- Condiciones simplificadas del flujo

Incluso asumiendo estas simplificaciones, la mayor diferencia con el caso del acuífero confinado es que a medida que el flujo se acerca al pozo, no solamente disminuye el radio de la sección cilíndrica atravesada, sino también la altura (en el confinado era constante, el espesor del acuífero, figura 3A).

Suponiendo que la sección fuera cilíndrica, vamos a repetir el razonamiento que hicimos para deducir la formulación de Dupuit-Thiem, aplicando Darcy al flujo a través de un cilindro de radio r y altura h . (Ver la figura II.2)

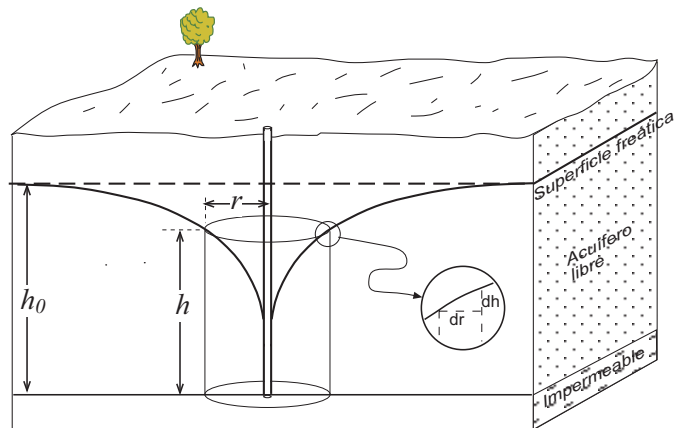


Fig. II.2.- Aplicación de Darcy al flujo hacia un sondeo que bombea en acuífero libre

$$Q = (2 \cdot \pi \cdot r \cdot h) \cdot K \cdot \frac{dh}{dr} \quad ; \quad \frac{dr}{r} = \frac{2 \pi h K}{Q} dh$$

Recordemos que en acuíferos confinados simplificábamos haciendo: $(\text{espesor} \cdot K) = T$, pero aquí no es posible porque el espesor saturado del acuífero libre no es constante (disminuye al acercarnos al pozo).

Integramos entre dos distancias cualesquiera, r_1 y r_2 (figura II.3); para estas distancias, los potenciales (altura del agua) serán, respectivamente h_1 y h_2 .

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{2\pi K}{Q} \int_{h_1}^{h_2} h dh \quad ; \quad [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{2\pi K}{Q} \left[\frac{h^2}{2} \right]_{h_1}^{h_2}$$

$$\ln r_2 - \ln r_1 = \frac{2 \pi K}{Q} \left(\frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \right)$$

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\pi K}{Q} (h_2^2 - h_1^2) \quad (\text{II.1})$$

$$(h_2^2 - h_1^2) = (h_2 - h_1) \cdot (h_2 + h_1) \approx (s_1 - s_2) \cdot (2h_0) \quad (\text{II.2})$$

Efectivamente, como se aprecia en la figura II.3, $h_2 - h_1$ es igual a $s_1 - s_2$. Y por otra parte, si los descensos son pequeños en comparación con el espesor saturado es posible esta **simplificación**: $(h_2 + h_1) \approx 2h_0$.

Sustituyendo (II.2) en (II.1) resulta:

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\pi K}{Q} (s_1 - s_2) \cdot 2h_0$$

$$s_1 - s_2 = \frac{Q}{2 \pi K h_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{II.3})$$

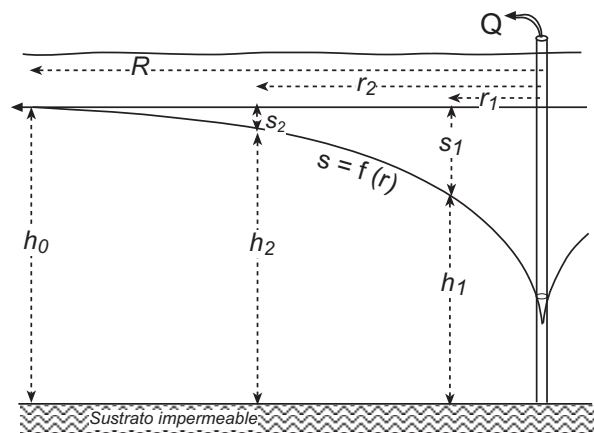


Fig. II.3. (II.3)

⁵ Aproximación de Dupuit-Forchheimer (Custodio, 1982, p.640)

Que es la misma fórmula (2) que habíamos obtenido para acuíferos confinados, ya que $(K \cdot h_0)$ es igual a la transmisividad, T . La simplificación expresada en (II.2) en la práctica resulta aceptable si los descensos son menores del 10-15% de h_0 .

Corrección de Jacob

Si los descensos son mayores y la simplificación (II.2) no es aceptable, debemos utilizar la llamada **corrección de Jacob** (1969, en Custodio, 1983, p. 644). Para la distancia $r_2 = R$, resulta: $h_2 = h_0$ y $s_2 = 0$, lo que transforma la expresión (II.1) en la siguiente:

$$\ln \frac{R}{r_1} = \frac{\pi K}{Q} (h_0^2 - h_1^2) \quad (\text{II.4})$$

Y la expresión (II.2) se puede elaborar de esta forma

$$(h_0^2 - h_1^2) = (h_0 - h_1) \cdot (h_0 + h_1) = (h_0 - h_1) \cdot (2h_0 - h_0 + h_1) = (h_0 - h_1) \cdot (2h_0 - (h_0 - h_1)) = s_1 \cdot (2h_0 - s_1) = (s_1 \cdot 2h_0 - s_1^2) \quad (\text{II.5})$$

Sustituyendo (II.5) en (II.4) resulta:

$$\ln \frac{R}{r_1} = \frac{\pi K}{Q} \cdot (s_1 \cdot 2h_0 - s_1^2) \quad (\text{II.6})$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro por $2h_0$ y operando, se obtiene:

$$\ln \frac{R}{r_1} = \frac{2\pi K h_0}{Q} \cdot \left(s_1 - \frac{s_1^2}{2h_0} \right) \quad ; \quad s_1 - \frac{s_1^2}{2h_0} = \frac{Q}{2\pi K h_0} \ln \frac{R}{r_1} \quad (\text{II.7})$$

Si llamamos **descenso corregido** s'_1 (a una distancia r_1) a: $s'_1 = s_1 - \frac{s_1^2}{2h_0}$ (II.8)

la ecuación (II.7) resulta: $s'_1 = \frac{Q}{2\pi K h_0} \ln \frac{R}{r_1}$ (II.9)

Que es la misma ecuación (3) que obtuvimos para acuíferos confinados, pero utilizando los *descensos corregidos* mediante la expresión (II.8), en lugar de los descensos reales.

La expresión (II.8) para un caso general es así: $s' = s - (s^2/2h_0)$ (II.10)

O inversamente, despejando s : $s = h_0 - \sqrt{h_0^2 - 2 \cdot s' \cdot h_0}$ (II.11)

En ambas fórmulas (II.10) y (II.11): s = descenso en acuífero libre de espesor saturado inicial h_0
 s' = descenso equivalente si el acuífero fuera confinado (de espesor constante)

Los descensos existentes en el acuífero libre debemos modificarlos mediante la expresión (II.10) antes de introducirlos en la fórmula de Dupuit (para calcular la T mediante un *bombeo de ensayo*).

Inversamente, un descenso calculado con la fórmula de Dupuit será **el que se habría producido con espesor constante del acuífero** (confinado), y mediante la expresión (II.11) obtendremos el correspondiente descenso real para acuífero libre.