Distribuciones Estadísticas

Introducción. ¿Para qué sirve esto?

Con frecuencia nos planteamos **dos tipos** de cuestiones relacionadas con la probabilidad de que se presente un cierto caudal o de que se produzca cierta precipitación:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el caudal supere 40 m^3/seg?
2. ¿Qué caudal será superado un 2% de los años?

Vemos que una es la inversa de la otra: A patir del valor calcular la probabilidad o al revés.

Y a veces en lugar de hablar de probabilidad se habla de *periodo de* retorno y la pregunta 2 se plantea como: "¿Cuál es el caudal con un periodo de retorno de 50 años?"

Primero veremos conceptos básicos, necesarios: muestra y población, media aritmética y desviación típica, etc. Después abordaremos la manera de responder a cuestiones como las planteadas más arriba con ejemplos concretos.

Población y muestra

Población es el conjunto total de individuos o sucesos que queremos estudiar.

A veces disponemos de medidas de toda la población estudiada, pero generalmente, esto sería muy difícil (medir la estatura de todos los españoles) o imposible (estudiando el caudal de un río tendríamos que medir los caudales de todos los años pasados y futuros). En estos casos debemos conformarnos con medir una parte de la población (una muestra). En cualquier caso, consideramos los datos disponibles y con ellos intentamos extraer estimaciones válidas para toda la población.

Muestra es una pequeña parte de la población elegida adecuadamente para que sea representativa del total de la población.

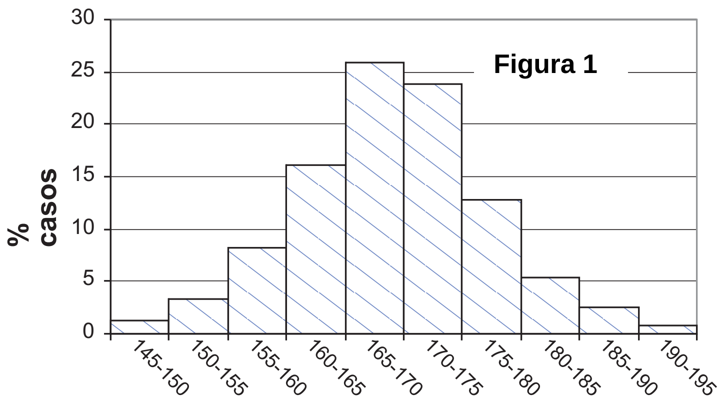
Si yo midiera la estatura de mis alumnos para conocer la estatura media del curso, ellos serían toda la población estudiada. Pero si, a partir de ellos, yo quiero extraer conclusiones sobre la estatura de toda la juventud española, mis alumnos serían solamente una muestra representativa de la población estudiada.

¿Cómo abordaríamos el problema sin la ayuda de los matemáticos?

Como una primera aproximación, vamos a abordar el problema sin más matemáticas que las cuatro operaciones básicas.

Supongamos que hemos medido la estatura de 243 personas, los valores los hemos distribuído en grupos de 5 en 5 cm. y aparecen en la tabla adjunta . Su representación gráfica aparece al lado.

Estatura (cm)	Nº casos	% casos
145-150	3	1,23
150-155	8	3,29
155-160	20	8,23
160-165	39	16,05
165-170	63	25,93
170-175	58	23,87
175-180	31	12,76
180-185	13	5,35
185-190	6	2,47
190-195	2	0,82
Totales....	**243**	**100**



Ahora vamos a contarlos de un modo acumulado: número total de casos hasta 150 cm, hasta 160 cm, etc. Efectuamos esa suma acumulada tanto con el número de casos como con los porcentajes. En esta tabla repetimos a la izquierda la tabla anterior y a la derecha los valores **acumulados;** al lado, su representación gráfica (en abcisas las estaturas, en ordenadas la última columna de la tabla).

Estatura (cm)	*Nº casos*	*% casos*		nº casos acumulado	% casos acumulado
145-150	*3*	*1,23*		3	1,23
150-155	*8*	*3,29*		11	4,53
155-160	*20*	*8,23*		31	12,76
160-165	*39*	*16,05*		70	28,81
165-170	*63*	*25,93*		133	54,73
170-175	*58*	*23,87*		191	78,60
175-180	*31*	*12,76*		222	91,36
180-185	*13*	*5,35*		235	96,71
185-190	*6*	*2,47*		241	99,18
190-195	*2*	*0,82*		243	100,00

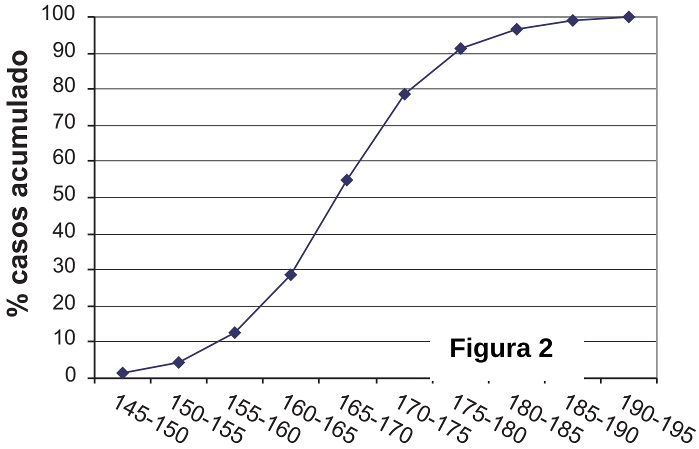


Figura 2

En este gráfico podemos leer qué porcentaje de la muestra es inferior p.ej. a 175 cm, o qué estatura deja por debajo, p.ej., al 80% de los casos.

Trabajando con caudales o precipitaciones el número de datos puede ser de 30 ó 40, o a veces menos, y no son suficientes para agruparlos en intervalos (caudales entre 5 y 10, entre 10 y 15, etc.). Pero sí podemos realizar un gráfico acumulado como el anterior con los datos individuales. Veamos como ejemplo 21 precipitaciones anuales en Central Park, New York . A la izquierda de la tabla aparecen en orden cronológico. A la derecha se han clasificado de mayor a menor, y en la última columna se refleja el porcentaje de datos que supera ese valor. Por ejemplo, para n=4, n/N=4/21*100=19 %. Quiere decir que el 19% de los datos es igual o menor que 896 mm.[1]

Representando gráficamente las dos últimas columnas, obtenemos un gráfico equivalente a la Figura 2, que habíamos preparado con las estaturas acumuladas; no tiene la misma suavidad, al tratarse de un número reducido de datos reales, pero la lectura de ambos gráficos ha de ser la misma: En este último podríamos leer directamente la probabilidad de que la precipitación sea <1300 mm, o, a la inversa, qué valor de precipitación no se supera el 30% de los años.

Año	P (mm)
1962	944
1963	871
1964	838
1965	663
1966	1013
1967	1248
1968	1107
1969	1233
1970	896
1971	1442
1972	1703
1973	1454
1974	1211
1975	1555
1976	1049
1977	1390
1978	1265
1979	1324
1980	1132
1981	968
1982	1052

n	P (mm)	n/N *100
1	663	4,8
2	838	9,5
3	871	14,3
4	896	19,0
5	944	23,8
6	968	28,6
7	1013	33,3
8	1049	38,1
9	1052	42,9
10	1107	47,6
11	1132	52,4
12	1211	57,1
13	1233	61,9
14	1248	66,7
15	1265	71,4
16	1324	76,2
17	1390	81,0
18	1442	85,7
19	1454	90,5
20	1555	95,2
21	1703	100,0

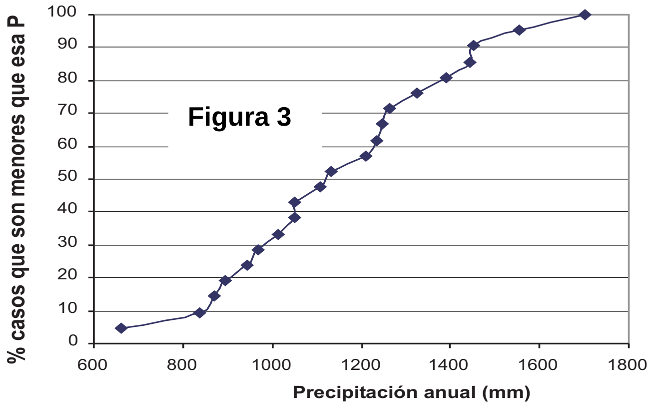


Figura 3

[1] En realidad se divide por n/(N+1) o por (n–0,5)/N, para evitar que al llegar al mayor salga el 100%. La última columna de la tabla es correcta para esta muestra: el 100% son iguales o menores que 1703 mm., el año más lluvioso registrado; pero no podemos suponer que nunca en el futuro se vaya a presentar un año mayor que 1703 mm.

Distribuciones simétricas y asimétricas

Si en la figura 1 hiciéramos los intervalos más pequeños, y aumentáramos el número de valores medidos, el gráfico continuaría con esa forma de campana , pero se iría suavizando hasta ser una curva continua. Lo mismo sucedería con la curva en forma de S de la Figura 2. Así obtendríamos las dos curvas que aparecen en la Figura 4

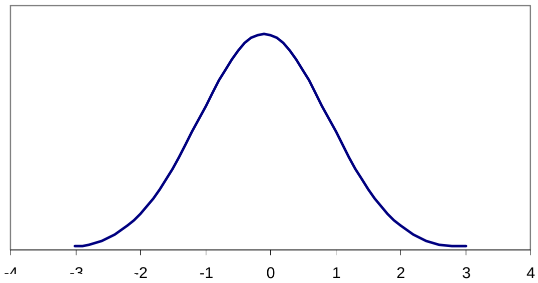
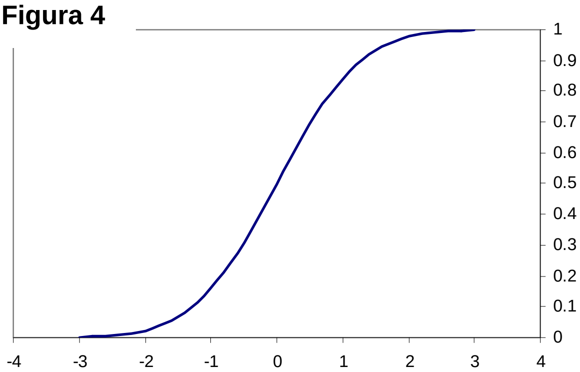


Figura 4



Gauss encontró la ecuación de estas curvas, que utilizaremos más adelante.

La ecuación de la curva en forma de campana se llama *función de densidad* y la de forma de S *función de distribución*. Nosotros vamos a trabajar con la segunda.

Muchas variables naturales se ajustan a la *distribución simétrica* estudiada por Gauss, pero no todas. En ocasiones no hay la misma proporción de pequeños que de grandes, eso dará lugar a una *distribución asimétrica*.

Por ejemplo, si representáramos los ingresos de la población de una ciudad, seguro que la campana no sería simétrica: la riqueza se distribuye con menor equidad que la estatura, y mientras que la proporción de altos y bajos es similar, no así la de ricos y pobres (hay pocos ricos y muchos pobres). Quizá la campana correspondiente tendría una forma similar a la figura 5. Los matemáticos han encontrado para nosotros las ecuaciones de muchas de estas campanas asimétricas (**Gumbel**, **Pearson III**, etc.). En otras ocasiones, los valores no se ajustan a la distribución de Gauss, pero sus logaritmos sí: se denomina entonces **log-normal** (la distribución de Gauss también se llama "normal").

Figura 5.- Distribución asimétrica en la que los valores más frecuentes (pico de la curva) son más bajos que la media, (esta curva corresponde a la ecuación de Gumbel)

En **Hidrología**, las precipitaciones o caudales **anuales** suelen ajustarse a la distribución simétrica de Gauss, pero los valores **máximos**, no: si consideramos el día más caudaloso o el más lluvioso de cada año de una serie larga de años (eso es necesario para estudiar la previsión de avenidas), no se ajustarán a Gauss, sino probablemente a la campana asimétrica descrita por Gumbel o alguna similar.

Media y desviación típica

Sea cual sea la distribución, para caracterizar un conjunto cualquiera de medidas (las estaturas de los españoles, los caudales del río Alberche) es necesario disponer de un valor indicativo de su **tendencia central** y otro valor que nos indique la **dispersión**: si los valores están apretados o alejados a ambos lados de la media.

Para indicar la **tendencia central**, normalmente se utiliza la **media aritmética**, tan intuitiva y que todos conocen: sumar valores y dividir por el número de casos. Pero **en una distribución asimétrica, la media aritmética nos proporciona una información equívoca**: Retomamos el ejemplo de los ingresos: Supongamos que en una aldea de 100 vecinos hay 3 vecinos riquísimos y el resto bastante pobres. Si calculáramos los ingresos medios anuales de esa aldea, la "renta per capita" sería alta; este valor nos engañaría respecto a la pobreza de la mayoría de los vecinos. En estos casos es más significativa la **mediana**, que es un valor que deja por encima a la mitad de los casos y por debajo a la otra mitad. En la aldea de nuestra fábula, para obtener una idea del nivel de ingresos general, sería más útil fijarnos en un vecino elegido de modo que el 50% fueran más ricos que él y la otra mitad más pobre. (Esto es la **mediana** o **frecuencia 0,50**). (En la distribución de Gauss, la mediana y la media coinciden).

La **dispersión de los datos** a ambos lados de la media se evalúa mediante la **desviación típica** (o estándar, es lo mismo). La desviación típica (***s*** ó $\boldsymbol{\sigma}$) se calcula en función de la suma de las desviaciones de cada punto (x) a la media previamente calculada ($\bar{x}$). n es el número total de datos.

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}}$$

Por ejemplo, las dos series de datos siguientes tienen la misma media (23) pero obviamente son muy distintas, en la segunda los datos están más dispersos respecto de la media:

							Media	Desv. típica
19	20	21	23	24	26	28	23	3,02
5	9	17	23	28	35	44	23	13,94

La desviación típica no sólo nos indica de un vistazo la dispersión de los datos a ambos lados de su media, sino que es específicamente útil para realizar ciertos cálculos que veremos más adelante.

La fórmula anterior se aplica sin problema a la población (es decir, si hemos podido medir todos los datos de la población estudiada, y con ellos aplicamos la fórmula). Pero lo habitual es que dispongamos sólo de los datos de una muestra, y la desviación típica de esa muestra puede no coincidir con la de toda la población; para moderar este error se utiliza este **estimador de la desviación típica**:

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

Cuando el número de datos (n) es grande las dos fórmulas proporcionan valores casi idénticos.

Estas dos fórmulas se incluyen en las calculadoras científicas como σ_n y σ_{n-1}

Normalmente se utiliza la notación $\boldsymbol{\sigma}$ cuando se ha calculado con los datos de la **población** y se escribe como ***s*** si se ha calculado con una **muestra**. (Análogamente suele usarse μ para la media aritmética calculada sobre la población y $\bar{x}$ para la calculada sobre una muestra).

El cuadrado de la desviación típica es la **varianza** (s_n^2, σ_n^2), el cuadrado del estimador que preferimos utilizar para las muestras se denomina **quasivarianza** (s_{n-1}^2, σ_{n-1}^2)

Coeficiente de Variación

Si ambas series tienen la misma media, su desviación típica nos indica el grado de dispersión de los valores a los lados de la media. Pero *si las medias son distintas, la simple comparación de las desviaciones típicas no sirve de nada*. Supongamos ahora que queremos comparar la primera de las series anteriores con otra nueva serie cuyos valores están en un rango distinto, y deseamos saber cual está mas dispersa a ambos lados de su media:

							Media	Desv. típica	C.V
19	20	21	23	24	26	28	**23**	3,0	0,13
1259	1311	1350	1374	1396	1423	1445	**1365,4**	64,8	0,05

Así vemos que la segunda serie parece que presenta una mayor dispersión (s = 64,8 parece muy alta comparada con s = 3,0 de la primera). Pero s=3,0 en valores que rondan la media de 23 es mayor que s = 64,8 en una población de media 1365. Esta idea se cuantifica mediante el Coeficiente de Variación (C.V.) :

$$C.V. = \frac{Desviación\,Típica}{Media\,aritmética}$$

Así observamos que la dispersión de la primera muestra es relativamente mayor (CV=0,13) su desviación típica equivale al 13% de la media, mientras que en la segunda muestra, su desviación típica es solamente el 5% de su media (CV=0,05)

Cálculo de la desviación típica

Es simple calcularla artesanalmente, basta con aplicar la fórmula: primero la media aritmética, luego se va calculando la diferencia entre cada valor y la media, su cuadrado, suma de todos los cuadrados, etc.

Pero lo habitual es realizar el cálculo con una calculadora o con la Hoja de Cálculo en un ordenador.

Con la **calculadora** el proceso se limita a introducir todos los datos, y luego solicitar la media y la desviación típica con las teclas correspondientes. Aparecen las teclas $\boldsymbol{\sigma_n}$ y $\boldsymbol{\sigma_{n-1}}$, que se refieren respectivamente a las dos fórmulas que hemos visto: con los datos de la población (dividir por n) y con los datos de la muestra (dividir por n-1)

Utilizando la **hoja de cálculo** se utiliza la fórmula **=DESVESTP( )**, o bien **=DESVEST( )**, refiriéndose, como antes a los datos de la población o de una muestra, respectivamente. En ambos casos, dentro del paréntesis incluiremos las celdillas que deseamos realizar el cálculo, por ejemplo : =DESVEST(A2:A35) , si los valores se encuentran en la columna A, desde A2 hasta A35. La media aritmética se obtiene mediante **=PROMEDIO( )**.

Puntuaciones tipificadas

Cuando abordamos el problema de "¿qué probabilidad existe de que tal variable supere tal valor?", las puntuaciones (valores) brutas están medidas en cm, mm, pulgadas o m^3/seg, dependiendo de la variable estudiada, del rango de valores en que ésta se mueve y de las unidades utilizadas. Se hace necesario **homogeneizar** la unidad de medida. Veámoslo con un ejemplo:

Deseamos comparar un pequeño arroyo (caudal medio=6,3 litros/seg; desviación típica= 0,9 litros/seg.) con un gran río (caudal medio= 97 m^3/seg; desviación típica 13,4 m^3/seg). En un año húmedo ambos superaron la media: en el primero el caudal fue de 7,9 litros/seg, y en el segundo de 112 m^3/seg. ¿Cuál de los dos datos fue mas excepcional (comparado con los datos de su propia historia, claro), cuál se apartó más de su media? .

El arroyo superó a su media en 7,9-6,3= 1,6 l/s. El caudal del gran río estuvo 112-97= 15 m^3/seg sobre su media. Pero en lugar de expresarlo en litros/seg o en m^3/seg, vamos a expresarlo en desviaciones típicas:

El caudal del arroyo superó a su media en $\frac{7,9-6,3}{0,9}$ =**1,78** desviaciones típicas.

El caudal del gran río superó a su media en $\frac{112-97}{13,4}$ =**1,12** desviaciones típicas .

Por tanto, el caudal del arroyo era más excepcional (estaba más alejado de su media) que el del gran río.

Generalizando: $\boxed{\text{Puntuación tipificada} = \frac{\text{Puntuación bruta-Media}}{\text{Desviación típica}}}$

La puntuación tipificada se representa generalmente como ***u*** o ***z***. La fórmula anterior se expresa así:

$$\boxed{z = \frac{x-\overline{x}}{s_x}}$$

Cálculo de probabilidades con la Ley de Gauss (valores medios)

Ahora ya podemos abordar los dos tipos de cuestiones que planteábamos al principio:

> ***1.*** *¿Cuál es la probabilidad de que el caudal supere 40 m^3/seg? O bien: ¿Cada cuántos años se superará el caudal de 40 m^3/seg?*
>
> ***2.*** *¿Qué caudal será superado un 2% de los años? O lo que es lo mismo: ¿Cual es el caudal superado cada 50 años?*

Datos necesarios:

- ✓ Debemos saber o suponer que estos caudales se ajustan a la Ley de Gauss
- ✓ Media aritmética=29,8 m^3/seg; desv típica=8,1 m^3/seg

Solución a la Cuestión 1 (del valor a la probabilidad):

1º) Expresamos el caudal de 40m^3/seg como puntuación tipificada: $z = \frac{40 - 29{,}8}{8{,}1} = 1{,}26$. Esto significa que ese dato individual está 1,26 desviaciones típicas por encima de la media.

2º) Calculamos la probabilidad de que **z**≥1,26. Como aplicar la ecuación de Gauss no es simple, ésto puede hacerse de dos maneras:

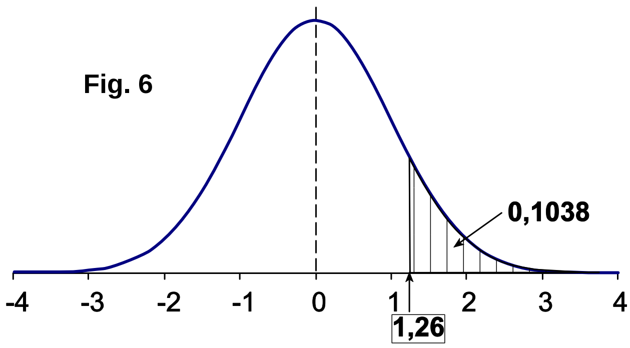
--Con la **Hoja de Cálculo**, escribiendo en EXCEL la siguiente fórmula:

```
=1-DISTR.NORM.ESTAND(1,26)
```

--Aplicando la **Tabla** que se presenta al final (Esta Tabla se construye aplicando la fórmula de Gauss a todos los posible valores de ***z***).

Para nuestro caso (z =1,26) por cualquiera de los dos procedimientos obtenemos el valor: 0,10383. Por tanto, el 10,38% de los años tendrán un caudal igual o superior a 40 m^3/seg. El caudal citado se superará en promedio cada 10 años.

Fig. 6



Solución a la Cuestión 2 (de la probabilidad al valor):

Se trata de repetir el proceso anterior al revés:

1º) Calculamos a qué valor de ***z*** corresponde la probabilidad 0,02 (o sea: 2%). De nuevo, ésto puede hacerse de dos maneras:

--Con la Hoja de Cálculo, escribiendo en EXCEL la siguiente fórmula:

```
=DISTR.NORM.ESTAND.INV(1-0,02)
```

--Aplicando la Tabla que se presenta al final, inversamente a como la utilizamos antes: buscar dentro de la tabla la probabilidad requerida (en este ejemplo, 0,02), o la más próxima a ese valor, y desde el interior de la tabla, leer el valor de ***z*** correspondiente en los bordes de la Tabla.

Para nuestro caso (probabilidad=0,02) por cualquiera de los dos procedimientos obtenemos el valor: 2,05. Finalmente, calculamos a qué puntuación bruta corresponde una puntuación tipificada de 2,05:

$$2{,}05 = \frac{x - 29{,}8}{8{,}1} \quad ; \quad \mathrm{x} = 46{,}4$$

Por tanto, el valor que es superado un 2% de los años es 46,4 m^3/seg

Las mismas cuestiones con valores son inferiores a la media

En las dos cuestiones anteriores se manejaban caudales superiores a la media. Nos movemos en la mitad derecha de la "campana" de Gauss (ver la figura 6). De hecho, la tabla de valores que utilizamos para resolver las dos cuestiones anteriores, solamente refleja la mitad derecha del gráfico de Gauss; no sería problema construir de una tabla de doble tamaño para manejar también valores **inferiores a la media.**

Si estamos haciendo previsiones de años secos, las preguntas (equivalentes a las cuestiones ***1*** y ***2*** de la página anterior) serán de este tipo:

> ***3.*** *¿Cuál es la probabilidad de que el caudal no alcance los 15 m^3/seg?*
> ***4.*** *¿Qué caudal no se alcanzará un 10% de los años?*

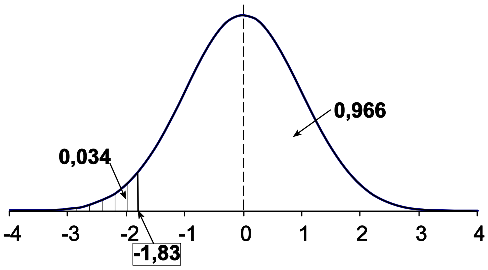
Se trata de la misma muestra que en los ejemplos ***1*** y ***2*** anteriores (Media aritmética =29,8 m^3/seg; desv típica=8,1 m^3/seg)

Solución a la Cuestión 3 (del valor a la probabilidad):

1º) Expresamos el caudal de 15 m^3/seg como puntuación tipificada: $z = \frac{15 - 29,8}{8,1} = -1,83$. Esto significa que ese dato individual está 1,83 desviaciones típicas por debajo de la media.

2º) Calculamos la probabilidad de que $z \geq -1,83$:

Aplicando la **Tabla** buscamos la probabilidad correspondiente a $z = -1,83$.
Para valores **negativos** de z se toma el valor complementario, es decir: si para 1,83 la tabla da 0,034, para –1,83 corresponde 1-0,034=0,966



Por tanto, la probabilidad de superar el caudal de 15 m^3/seg es de 0,966, y la probabilidad de que **no** se supere ese valor será de 1-0,966= 0,034 (¡Hemos vuelto al 0,034 que nos proporcionó la tabla inicialmente!).

> Con la **Hoja de Cálculo**, escribiendo en EXCEL la fórmula: =DISTR.NORM.ESTAND(-1,83) nos proporciona directamente la probabilidad de que sea **menor que** -1,83 desviaciones típicas: 0,034

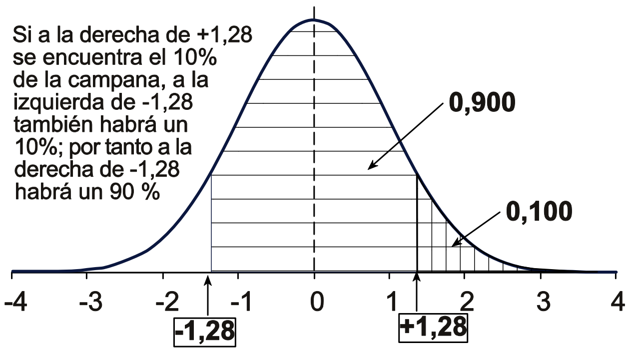
Respuesta final: probabilidad de que no alcance 15 m^3/s = 3,4%

Solución a la Cuestión 4 (de la probabilidad al valor):

La cuestión ***4*** podemos replantearla así: *¿Qué caudal se superará el 90% de los años?*

1º) Calculamos a qué valor de z corresponde la probabilidad 0,90 (o sea: 90%):

Aplicando la Tabla, buscamos dentro de ella la probabilidad requerida (0,90), pero ese valor no existe, así que buscamos el complementario: 0,10 (1-0,90 =0,10) o el más próximo a ese valor, y desde el interior de la tabla, leemos el valor de z correspondiente en los bordes de la Tabla: 1,28 . Pero z = 1,28 corresponde a una probabilidad de 0,10; para la probabilidad 0,90 tomamos $z = -1,28$



> Con la **Hoja de Cálculo**, escribiendo en EXCEL la fórmula: =DISTR.NORM.ESTAND.INV(0,10) se obtiene directamente el valor –1,28

2º) Calculamos a qué puntuación bruta corresponde una puntuación tipificada de –1,28:

$$-1,28 = \frac{x - 29,8}{8,1} \quad ; x = 19,4$$

Por tanto, el valor que no se alcanza el 10% de los años (probabilidad 0,90 de ser superado) es 19,4 m^3/seg.

Por supuesto que todos estos cálculos sólo tienen sentido si **suponemos que los datos que manejamos se distribuyen de acuerdo con la Ley normal o de Gauss**. Y el problema es que no hemos visto cómo saber si una serie de datos se ajustan a la Ley de Gauss o no.

Para una primera aproximación, se pueden representar los datos en un papel probabilístico de Gauss y apreciar si los puntos forman aproximadamente una recta. Para más exactitud habría que aplicar el test de *chi-cuadrado*. Y para menos exactitud, simplemente fiarse de la bibliografía que apunta que los datos **anuales** de precipitaciones o caudales suelen ajustarse a la Ley de Gauss...

Valores extremos. Distribución de Gumbel

Esta ley de distribución de frecuencias se utiliza para el estudio de los valores extremos. Por ejemplo, si hemos elegido el día mas caudaloso o de mayor precipitación de cada año de una serie de años.

La probabilidad de que se presente un valor **inferior** a x es:

$$\boxed{F(x) = e^{-e^{-b}}} \quad (1)$$

siendo: $b = \alpha\,(x - u)$ (2)

$\alpha = \sigma_y \;/\; s_x$ (3)

$u = \bar{x} - \dfrac{\mu_y}{\alpha}$ (4)

e = base de los logaritmos neperianos

$\bar{x}$ = media aritmética de la muestra

s_x = desviación típica de la muestra

σ_y , μ_y = consultar en la tabla adjunta, según el número de datos de la muestra[2]]

(Ver nota[3])

Mediante las expresión anteriores podremos calcular la frecuencia a partir del valor x, es decir: calcularcon qué frecuencia (o periodo de retorno) se presentará un cierto caudal o precipitación.

Para solucionar el caso inverso (qué caudal o precipitación se producirán cada n años) debemos despejar b en la expresión (1), obteniendo:

$$b = -\ln\,(-\ln\,(F(x))) \quad (5)$$

Y, finalmente, despejando x en (2):

$$x = (b/\,\alpha) + u \quad (6)$$

nº datos	μ_y	σ_y
10	0,4952	0,9496
15	0,5128	1,0206
20	0,5236	1,0628
25	0,5309	1,0914
30	0,5362	1,1124
35	0,5403	1,1285
40	0,5436	1,1413
45	0,5463	1,1518
50	0,5485	1,1607
55	0,5504	1,1682
60	0,5521	1,1747
65	0,5535	1,1803
70	0,5548	1,1854
75	0,5559	1,1898
80	0,5569	1,1938
85	0,5578	1,1974
90	0,5586	1,2007
95	0,5593	1,2037
100	0,5600	1,2065

Ejemplo.- De una serie de 55 caudales extremos (el caudal diario máximo de cada año)[4], hemos calculado:

---

[2] σ_y , μ_y son, respectivamente, la media y la desviación típica de una serie de valores y_i (i = 1 a N ; N = nº de datos de la muestra) que dependen solamente del número de datos, y que corresponden a la siguiente expresión:

$$y_i = -\ln\left(\ln\left(\frac{N+1}{i}\right)\right)$$

(Cálculo de estos parámetros en un documento Excel, en la web, sección "Complementos")

Wanielista (1997) utiliza μ_y =0,5772; σ_y = 1,2825 sin considerar el número de datos

[3] En Chow et al. (1984) el valor de α es el inverso del presentado aquí (y en muchos textos, como Aparicio, 1997), pero el resultado final es el mismo, ya que en la expresión (2) de Chow et al. (op.cit.) α está en el denominador

Media= 21,97 m^3/seg

Desv típica=13,22 m^3/seg

Calcular: a) Probabilidad de que se supere un caudal de 60 m^3/s. b) Qué caudal se superará el 1% de los años

a) ¿Cual será la probabilidad de que (el día más caudaloso del año) el caudal supere el valor de 60 m^3/seg?

1º) De acuerdo con la tabla adjunta, para 55 datos, tomamos los valores:

$$\mu_y = 0{,}5504 \quad \sigma_y = 1{,}1682$$

2º) Calculamos α y u:

$$\alpha = \sigma_y \,/\, s_x = 1{,}1682 / 13{,}22 = 0{,}0884$$

$$u = \bar{x} - \mu_y / \alpha = 21{,}97 - 0{,}5504 / 0{,}0884 = 15{,}741$$

3º) Calculamos el exponente b:

$$b = \alpha\,(x-u) = 0{,}0884 \cdot (60 - 15{,}741) = 3{,}917$$

4º) Aplicamos la ecuación de Gumbel (1) para el caudal del problema (60 m^3/s). La probabilidad de que se presente un caso **menor** que x será:

$$F(x) = e^{-e^{-3{,}917}} = 0{,}9803 \approx 98{,}03\%$$

Por tanto, la probabilidad de que se presente un caso mayor que ***x*** será:

$$1 - F(x) = 1 - 0{,}9803 = 0{,}0197 \;(= 1{,}97\%)$$

Finalmente, el **periodo de retorno** es el inverso de la probabilidad:

Periodo de retorno= 1/0,0197 = 50,8 años

b) Caso inverso: Calcular qué caudal se superará un 1% de los casos.

Si un caudal se superará el 1% de los años, será inferior el 99%, es decir: $F(x)$ =0,99.

Calculamos α y u mediante las exprresiones (3) y (4). En este caso, ya las hemos calculado en el apartado anterior.

Aplicando la fórmula (5):

$$b = -\ln(-\ln(F(x))) = -\ln(-\ln(0{,}99)) = 4{,}600$$

Aplicando la fórmula (6):

$$x = (b / \alpha) + u = 4{,}600 / 0{,}0884 + 15{,}741 = 67{,}8 \text{ m}^3/\text{s}$$

La simplificación mostrada a lo largo de todas estas páginas (indicando que los valores medios se ajustan a Gauss, y los valores extremos se ajustan a Gumbel) es solamente válida con fines didácticos, para una primera aproximación al tema.

Existen muchas otras distribuciones, entre las que destacan, como más utilizadas, la **lognormal** (los logaritmos de los valores son los que se ajustan a la ley de Gauss) o la ley **Pearson III**, adoptada por las agencias federales en USA. Ver, por ejemplo en Viessman, 2003, capítulo 3.

En España los organismos oficiales para precipitaciones máximas aplican la distribución **SQRT-max**[5]

---

[4] Datos de Hoyos del Espino, en la cabecera del río Tormes, cuenca receptora 88 km^2

[5] Ver en http://web.usal.es/javisan/hidro (Seción "Complementos")

Probabilidad, periodo de retorno y riesgo de fallo

A lo largo de los apartados anteriores se ha estado utilizando indistintamente probabilidad (por ejemplo: un 2% de los años) y expresiones como "cada 50 años".

Es evidente que si un suceso se presenta (por término medio) cada 10 años, su probabilidad es de 0,10 (10%).

Análoga e inversamente, si la probabilidad de que algo suceda es de 0,04 (4%), ello quiere decir que, en promedio, sucederá 4 veces en 100 años, o sea: una vez cada 25 años.

Estos conceptos se relacionan mediante la expresión:

$$\text{Periodo de retorno } = \frac{1}{\text{Probabilidad}}$$

Chow et al. (1994, p.393) ofrecen una elaborada demostración de la fórmula anterior (¡ !).

En Hidrología se utiliza más el **periodo de retorno** que la **probabilidad**. Así, se habla de la crecida de 50 años en lugar de referirse a la crecida con probabilidad 0,02 o de la precipitación con retorno de 100 años en vez de la precipitación con probabilidad 0,01.

Supongamos que hemos calculado un cierto caudal que corresponde al retorno de 50 años. La probabilidad de que se produzca el año próximo será de 0,02 (=1/50); y la probabilidad de que se produzca el siguiente año será de 0,02 y así cada año. Necesitamos conocer la probabilidad de que se alcance ese caudal en los próximos *n* años:

Probabilidad de que un suceso de retorno T se produzca el próximo año ....$1/T$
" " " NO se produzca el próximo año (*) ....$1-(1/T)$
" " " NO se produzca los próximos dos años(**) ....$[1-(1/T)]. [1-(1/T)]$
" " " NO se produzca los próximos n años.............$[1-(1/T)]^n$
" " " SI se produzca los próximos n años (*)........$1-[1-(1/T)]^n$

Vamos a denominar a la última expresión obtenida arriba es el **riesgo de fallo (R)**, es decir: *la probabilidad de que **sí** se produzca alguna vez un suceso de **periodo de retorno T** a lo largo de un periodo de **n** años*:

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n$$

Ejemplo: Se va a construir un canal cuya *vida útil* es de 75 años. Si el caudal supera el valor correspondiente al periodo de retorno de 100 años, se desbordará. Calcular la probabilidad de que se produzca un desbordamiento en alguno de los próximos 75 años

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{75} = 0{,}529 = 52{,}9\%$$

Por tanto, existe un 52,9% de probabilidad de que el caudal de retorno 100 años se alcance en alguno de los próximos 75 años.

Se produce la siguiente paradoja: si consideramos un caudal con retorno de 100 años, parece seguro que se presente en alguno de los próximos 100 años. Pero si aplicamos la fórmula anterior, haciendo T= 100 y n=100, y obtenemos 0,633 , es decir solamente un 63,3 %

(*) Las probabilidades de dos **sucesos complementarios** (debe suceder uno u otro) suman 1. Por ejemplo: probabilidad de obtener un 3 en un dado= 1/6. Probabilidad de obtener un valor distinto de 3= 1-1/6 = 5/6

(**) La probabilidad de que se produzcan dos **sucesos independientes** es el producto de sus probabilidades; por ejemplo: probabilidad de obtener un 3 en un dado= 1/6. Probabilidad de obtener dos 3 seguidos = 1/6.1/6 =1/36

Cálculo inverso: evaluación del periodo de retorno a partir del riesgo

Muchas veces, esta sencilla fórmula debe aplicarse a la inversa: despejar *T* a partir del riesgo de fallo (*R*) y del número de años (*n*). Depejando *T* en la última fórmula obtenemos:

$$T = \frac{1}{1 - \exp\left(\frac{\ln(1-R)}{n}\right)}$$

donde: *R* =riesgo de que se produzca el suceso de probabilidad 1/*T* durante los próximos *n* años
T = periodo de retorno en años
exp(*x*) = e ^{x}

Ejemplo: se está diseñando una obra cuya vida útil se calcula en 50 años y se admite que en ese periodo el riesgo sea de un 10% (probabilidad de que en esos 50 años se produzca un caudal superior a un valor determinado). Calcular dicho caudal.

En la fórmula anterior basta con hacer: *R* = 0,10; *n* = 50 años; y despejar *T*. Con estos datos obtenemos un periodo de retorno *T* = 475 años.

En este ejemplo, el paso siguiente sería estudiar estadísticamente las series históricas de caudales de ese cauce para evaluar el caudal correspondiente a un retorno de 475 años (Probabilidad = 1/475 = 0,0021).

Bibliografía

Aparicio, F.J. (1997).- *Fundamentos de Hidrología de Superficie*. Limusa, 303 pp

Chow, V.T.; D.R. Maidment & L.W. Mays (1993).- *Hidrología Aplicada.* McGraw-Hill, 580 pp.

Viessman, W. & G. L. Lewis (2003).- *Introduction to Hydrolog*y. Pearson Education Inc., 5ª ed., 612 pp.

Wanielista, M. (1997).- *Hydrology and Water Quality Control* 2ª edición. Ed. Wiley

Ley de Gauss: Probabilidad de que z sea mayor o igual a ...

(Las columnas indican la segunda decimal. Ejemplo: Probabilidad de que ***z*** sea $\geq$ 1,41 es 0,07927)

Para valores de ***z*** negativos, tomar **1-tabla**. Ejemplo: Probabilidad de que *z* sea $\geq$ – 1,41 es 1 – 0,07927 = 0,92073

Para probabilidades > 0,50, el valor de ***z*** será el indicado por la tabla para la probabilidad complementaria, pero con signo –
Ejemplo : Valor de *z* con probabilidad de ser superado de 0,80. Para la probabilidad complementaria (0,20) la tabla indica *z*=0,84. Por tanto para probabilidad 0,80 adoptaremos –0,84

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000	0,49601	0,49202	0,48803	0,48405	0,48006	0,47608	0,47210	0,46812	0,46414
0,1	0,46017	0,45620	0,45224	0,44828	0,44433	0,44038	0,43644	0,43251	0,42858	0,42465
0,2	0,42074	0,41683	0,41294	0,40905	0,40517	0,40129	0,39743	0,39358	0,38974	0,38591
0,3	0,38209	0,37828	0,37448	0,37070	0,36693	0,36317	0,35942	0,35569	0,35197	0,34827
0,4	0,34458	0,34090	0,33724	0,33360	0,32997	0,32636	0,32276	0,31918	0,31561	0,31207
0,5	0,30854	0,30503	0,30153	0,29806	0,29460	0,29116	0,28774	0,28434	0,28096	0,27760
0,6	0,27425	0,27093	0,26763	0,26435	0,26109	0,25785	0,25463	0,25143	0,24825	0,24510
0,7	0,24196	0,23885	0,23576	0,23270	0,22965	0,22663	0,22363	0,22065	0,21770	0,21476
0,8	0,21186	0,20897	0,20611	0,20327	0,20045	0,19766	0,19489	0,19215	0,18943	0,18673
0,9	0,18406	0,18141	0,17879	0,17619	0,17361	0,17106	0,16853	0,16602	0,16354	0,16109
1,0	0,15866	0,15625	0,15386	0,15151	0,14917	0,14686	0,14457	0,14231	0,14007	0,13786
1,1	0,13567	0,13350	0,13136	0,12924	0,12714	0,12507	0,12302	0,12100	0,11900	0,11702
1,2	0,11507	0,11314	0,11123	0,10935	0,10749	0,10565	0,10383	0,10204	0,10027	0,09853
1,3	0,09680	0,09510	0,09342	0,09176	0,09012	0,08851	0,08692	0,08534	0,08379	0,08226
1,4	0,08076	0,07927	0,07780	0,07636	0,07493	0,07353	0,07215	0,07078	0,06944	0,06811
1,5	0,06681	0,06552	0,06426	0,06301	0,06178	0,06057	0,05938	0,05821	0,05705	0,05592
1,6	0,05480	0,05370	0,05262	0,05155	0,05050	0,04947	0,04846	0,04746	0,04648	0,04551
1,7	0,04457	0,04363	0,04272	0,04182	0,04093	0,04006	0,03920	0,03836	0,03754	0,03673
1,8	0,03593	0,03515	0,03438	0,03362	0,03288	0,03216	0,03144	0,03074	0,03005	0,02938
1,9	0,02872	0,02807	0,02743	0,02680	0,02619	0,02559	0,02500	0,02442	0,02385	0,02330
2,0	0,02275	0,02222	0,02169	0,02118	0,02068	0,02018	0,01970	0,01923	0,01876	0,01831
2,1	0,01786	0,01743	0,01700	0,01659	0,01618	0,01578	0,01539	0,01500	0,01463	0,01426
2,2	0,01390	0,01355	0,01321	0,01287	0,01255	0,01222	0,01191	0,01160	0,01130	0,01101
2,3	0,01072	0,01044	0,01017	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
2,4	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
2,7	0,00347	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139
3,0	0,00135	0,00131	0,00126	0,00122	0,00118	0,00114	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s_x}$$

donde: x =puntuación bruta
z = puntuación tipificada
$\bar{x}$ = media aritmética
s_x =desviación típica

Representación gráfica de la probabilidad proporcionada por esta tabla:
Si toda el área bajo la curva de Gauss vale 1 (ya que bajo la curva se encuentran el 100% de los casos), la tabla nos da la parte de dicha área superior a la puntuación dada.
A la derecha vemos un ejemplo: para ***z* = 1,5** la tabla nos proporciona el valor **0,0668** que es la parte rayada del dibujo (el **6,68%** de la superficie total bajo la curva) y representa **los casos que superan a la media en 1,5 desviaciones típicas**